Exercice 1 *(Mines-Ponts 21)*
Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et $b_n = \frac{a_n}{1+|a_n|}$.
Montrer que $\sum_n b_n z^n$ a un rayon de convergence $R' \geqslant 1$, puis déterminer R' en fonction de R.

Exercice 2 *(ENSEA 23)* Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $(1+n+n^2)x^n$ puis trouver une expression de la somme.

Exercice 3 *(CCINP 23)* Soit $a_0 = -4$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ et $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

a) Montrer que $|a_n| \leqslant 2^{n+2}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

b) Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est non nul.

c) Soit $\rho = \min(1, R)$. Pour $x \in]-\rho, \rho[$ on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Montrer que $S(x) = \frac{-4+6x+6x^2}{(x+1)(x-1)^2}$.

d) Trouver a, b, c, dans $\mathbf{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\frac{-4+6x+6x^2}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$.

e) En déduire une expression de a_n en fonction de n.

Exercice 4 *(CCINP 23)* Soit $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t$.

1) Montrer la convergence de la série de terme général $(-1)^n a_n$.

2) Soit R le rayon de convergence de la série de terme général $a_n x^n$ et f sa somme.

   a) Montrer $a_n \geqslant \frac{1}{2n+1}$ puis déterminer la valeur de R.

   b) Montrer que $(2n+3)a_{n+1} = 1 + (n+1)a_n$.

   c) Trouver une équation différentielle satisfaite par f.

Exercice 5 *(CCINP 23)*

a) Déterminer le rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1\cdot 3 \cdots (2n+1)} x^{2n+1}$.

b) Trouver une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par f.

c) Donner la dérivée de la fonction arcsin. En déduire une expression de $f(x)$.

Exercice 6 *(CCINP 23)* Soit (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k}$.

a) Montrer que $0 \leqslant u_n \leqslant 4^{n+1}\, n!$ pour tout n.

b) On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n x^n}{n!}$. Montrer que f est solution de l'équation $y' = y^2$ sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$.

c) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 7 *(Centrale 23)* Sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on définit $f \colon x \mapsto \frac{\sin(x)+1}{\cos(x)}$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in I$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$
   avec P_n un polynôme unitaire de degré n à coefficients dans $\mathbf{N}$.

b) Montrer que la série de Taylor de f est absolument convergente sur I.

c) Montrer que f coïncide avec sa série de Taylor sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 8 *(Centrale 23)* Soit (a_n) une suite de complexes. On suppose que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ a un rayon de convergence infini et l'on note $f(z)$ sa somme.

a) Montrer que : $\forall r > 0$, $\forall p \in \mathbf{N}$, $\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pt}\mathrm{d}t = 2\pi a_p r^p$.

b) En déduire que si f est bornée sur $\mathbf{C}$ alors f est constante.

c) On suppose maintenant qu'il existe $q \in \mathbf{N}^*$ et $(\alpha, \beta) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$ tels que : $\forall z \in \mathbf{C}$, $|f(z)| \leqslant \alpha |z|^q + \beta$.
   Montrer qu'alors f est une fonction polynomiale.