**Exercice 1** *(CCINP 21)* Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}_+$ on pose $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} e^{-nx}$.

a) Montrer que la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ converge simplement sur $\mathbf{R}_+$.

b) Montrer que la somme est continue sur $\mathbf{R}_+$ et de classe $C^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

c) Déterminer alors une expression simple de cette somme.

**Exercice 2** *(Centrale 21)* Pour $n \in \mathbf{N}^*$ soit $u_n(x) = \frac{(-1)^n n}{n^2+x}$.

a) Établir la convergence simple de la série de terme général $u_n(x)$ sur $\mathbf{R}_+$.

b) Pour $a > 0$, établir la convergence uniforme de la série de terme général $u_n(x)$ sur $[0, a]$.

c) Montrer que si $(a_n)$ est une suite croissante de réels positifs, alors $0 \leqslant (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \leqslant a_n$. En déduire que la série de terme général $u_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbf{R}_+$.

**Exercice 3** *(Centrale 2019)* Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in ]-1, 1[$ on pose : $u_n(\theta) = \frac{x^n \cos(n\theta)}{n}$.

a) Montrer que la série de terme général $u_n$ converge uniformément sur $\mathbf{R}$.

b) Montrer que $f_x : \theta \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \cos(n\theta)}{n}$ est dérivable sur R.

c) En déduire que $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2x\cos(\theta) + x^2) d\theta = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^n \cos(n\theta)}{n} d\theta$.

**Exercice 4** *(CCINP 22)*

a) Montrer que : $\forall x \in [0, 1]$, $\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$.

b) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2} \right)$ converge pour tout $x \in [0, 1]$.

c) Calculer la somme de cette série.

d) La convergence est-elle uniforme sur le segment $[0, 1]$ ?

**Exercice 5** *(CCINP 22)* Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$.

a) Montrer que $f$ est définie sur $\mathbf{R}$.

b) Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$. (On donnait la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/k^2$)

c) Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbf{R}^*$.

d) Déterminer la limite de $f'(x)$ quand $x$ tend vers 0.

e) Donner l'allure de la courbe représentative de $f$.

**Exercice 6** *(Mines-Ponts 21)* Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

a) Donner les domaines de définitions de $f$ et de $g$ puis établir la classe $C^\infty$ de ces deux fonctions.

b) Montrer que $g(x) = \left(1 - 2^{1-x}\right) f(x)$ pour tout $x > 1$.

c) Déterminer les limites de $f$ et de $g$ aux bords de leur domaine de définition.