Théorème Soit a, b, c, des applications continues d'un intervalle I dans $\mathbf{K}$. $\forall (t_0, \alpha, \beta) \in I \times \mathbf{K} \times \mathbf{K}$, il existe une unique solution au *problème de Cauchy* : $\begin{cases} y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \\ y(t_0) = \alpha \\ y'(t_0) = \beta \end{cases}$

Corollaire L'ensemble des solutions de *l'équation homogène* est un $\mathbf{K}$-ev de dimension 2.

✍ ✍

Exercice 1 *(ENSEA 23)* On s'intéresse à l'équation différentielle (E) : $xy''(x) + xy'(x) - y(x) = 0$.

a) Trouver une fonction polynomiale vérifiant (E).

b) Pour $x > 0$ on pose $G(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Dresser le tableau de variation de G sur $]0, +\infty[$.

c) Soit f une fonction de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et $S : x \mapsto xf(x)$.
Montrer que S est solution de (E) ssi f' vérifie une équation différentielle d'ordre 1.

d) Résoudre (E).

Exercice 2 *(ENSEA 2021)*
Déterminer les solutions de $xy''(x) - (x+1)y'(x) + y(x) = 0$ développables en série entière.

Exercice 3 *(CCINP 2021)* Soit (E) l'équation différentielle : $t^2y''(t) + 3ty'(t) + y(t) = t + \frac{1}{t}$.

a) Énoncer le théorème de Cauchy linéaire.

b) On pose pour tout réel x, $g(x) = f(e^x)$. Montrer que f est solution de (E) sur $\mathbf{R}_+^*$ si et seulement si g est solution d'une équation différentielle d'ordre 2 que l'on déterminera.

c) En déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice 4 *(Mines-Ponts 2022)*

a) Montrer que $(E) : 4xy'' + 2y' - y = 0$ admet des solutions développables en série entière.

b) En déduire les solutions de (E) sur $]0, +\infty$ et sur $]-\infty, 0[$. Y a-t-il des solutions définies sur $\mathbf{R}$?

Exercice 5 *(Mines-Ponts 2022)* On considère l'équation différentielle (E) : $y''(x) = (x^2 - 1)y(x)$.

a) Montrer que si y est une solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$ (respectivement $y'(0) = 0$) alors y est impaire (respectivement paire).

b) Trouver $a \in \mathbf{R}$ tel que $x \mapsto \mathrm{e}^{ax^2}$ soit solution de (E).

c) Soit $f : x \mapsto u(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si u est solution d'une équation différentielle à préciser.

d) Exprimer l'ensemble des solutions de (E) à l'aide de $v : x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6 *(TPE-IVP 2016)* Soit $(E) : y'' + f(x)y = 0$, où f est continue et intégrable sur $\mathbf{R}$.

a) Montrer que si y_1 et y_2 sont solutions de (E) alors $y_1'\,y_2 - y_2'\,y_1$ est constante sur $\mathbf{R}$.

b) Montrer que si y est une solution de (E) bornée sur $\mathbf{R}$ alors $y'(x)$ admet une limite finie en $+\infty$, puis montrer que cette limite est forcément nulle.

c) Montrer que (E) admet nécessairement une solution non bornée.