Exercice 1 *(Mines-Télécom 2022)* Soit $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$.
Déterminer le rayon de convergence R de $\sum u_n x^n$ puis étudier la convergence en $x = R$ et $x = -R$.

Exercice 2 *(CCINP 2019)*
Soit (a_n) définie par $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ et, pour $n \geqslant 2$, $a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-1}$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $|a_n| \leqslant 4^n$. Qu'en déduire concernant le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$?

b) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1+5x}{1+2x-3x^2}$. Trouver ainsi l'expression de a_n en fonction de n.

Exercice 3 *(CCINP 2022)* Soit $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum u_n x^n$.

b) Montrer qu'il existe trois réels a, b, c dépendant de x tels que :
$\forall x \in]-R, R[$, $\forall t \in [0,1]$, $\frac{1}{(1-xt)(1+t^2)} = \frac{a+bt}{1+t^2} + \frac{c}{1-xt}$. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

Exercice 4 *(CCINP 2022)* Soit $f(x) = \arcsin(x)\sqrt{1-x^2}$.

a) Justifier que f est de classe C^1 sur intervalle à préciser.

b) Trouver des fonctions polynomiales non nulles a, b, c, telles que : $a(x)f'(x) + b(x)f(x) = c(x)$.

c) En déduire que f est développable en série entière et déterminer son développement.

Exercice 5 *(Mines-Télécom 2019)* Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2+1}$.

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Étudier la continuité de f sur son domaine de définition.

c) Montrer que f est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

d) Déterminer la limite ℓ de f en $+\infty$ puis un équivalent de $f(x) - \ell$.

Exercice 6 *(Saint-Cyr 2023)* Développer $x \mapsto \ln(1 + x - 2x^2)$ en série entière au voisinage de 0 et préciser son rayon de convergence.

Exercice 7 *(ENSEA 2022)* Développer $x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ en série entière au voisinage de 0.
En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de $\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.