Exercice 1 *(Mines-Ponts 19)* Soit $f(t)=\cos\left(\frac{\arcsin t}{2}\right)$

a) Donner le domaine de définition de f puis une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par f.

b) En déduire un développement en série entière de f.

Exercice 2 *(Mines-Ponts 19)* Pour $n\in\mathbf{N}^*$, soit p_n le nombre de partitions de $[\![1,n]\!]$.

a) Montrer qu'en posant $p_0=1$ on a : $\forall\, n\in\mathbf{N},\ p_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p_k$.

b) Montrer que $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{p_n}{n!}x^n$ a un rayon de convergence $R\geqslant 1$.

c) Trouver une relation entre $f'(x)$ et $f(x)$; en déduire une expression de $f(x)$.

Exercice 3 *(CCP 2018)* Soit a et b deux réels distincts.

a) Trouver l'expression des c_n tels que $\frac{1}{(1-ax)(1-bx)}=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\,x^n$. sur un intervalle à préciser.

b) Trouver une expression de $\sum_{n=0}^{+\infty}c_n^2x^n$.

Exercice 4 *(Centrale 2019)* Soit l'équation différentielle $(E) : (1+x^2)y''(x)+xy'(x)-y(x)=0$.

a) Justifier l'existence et l'unicité d'une solution de (E) sur $\mathbf{R}$ vérifiant $y(0)=\sqrt{2}$ et $y'(0)=0$.

b) Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.

c) Résoudre (E) en posant $x=\operatorname{sh}(t)$.

Exercice 5 *(Mines-Télécom 2022)*
Résoudre $y''(x)+xy'(x)+y(x)=0$ avec les conditions initiales $y(0)=1$ et $y'(0)=0$.

Exercice 6 *(Mines-Télécom 2022)* Soit $f : x\mapsto \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.

b) Trouver une équation différentielle satisfaite par f.

c) En déduire le développement de f en série entière.