**Exercice 1** *(ENSEA 23)* Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

a) Justifier l'existence de $I_n$ puis calculer sa valeur.

b) Montrer que $\int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{x})\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k k!}{(2k)!}$.

**Exercice 2** *(CCINP 23)* Pour $n \in \mathbf{N}$ soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(n+x)}{(n+x)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

a) Justifier l'existence de $I_n$ puis déterminer sa limite quand $n$ tend vers l'infini.

b) Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(n+x)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. En déduire un équivalent de $I_n$.

**Exercice 3** *(CCINP 23)* Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t(\ln t)^2}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t$.

Justifier l'existence de $I$ puis montrer que $I = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

**Exercice 4** *(CCINP 23)* $I_{n,k} = \int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$ pour $(n,k) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}$ et $a_n = \frac{n!}{n^{n+1}}$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.

a) Après avoir justifié son existence, calculer $I_{n,k}$.

b) Déterminer le rayon de convergence $R$ de $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$.

c) Démontrer que pour $|x| < R$ on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^{+\infty} \frac{tx}{\mathrm{e}^t - tx}\,\mathrm{d}t$.

**Exercice 5** *(CCINP 23)* Soit $a_n$ le terme général d'une série absolument convergente.

a) Montrer que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^n\,\mathrm{d}t = n!$.

b) Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$. Soit $f(x)$ la somme de cette série.

c) Montrer que $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

**Exercice 6** *(Centrale 23)* Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on pose $f_n(x) = (\cos x)^n$.

a) Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de terme général $f_n$.

b) Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la série de terme général $f_n$.

c) Convergence et calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{\pi/2} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

**Exercice 7** *(Mines-Ponts 23)* Pour $n \in \mathbf{N}^*$ soit $a_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(t^n)}\,\mathrm{d}t$.

a) Justifier l'existence, puis trouver un équivalent de $a_n$.

b) Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

c) Étudier le comportement de la somme aux extrémités de l'intervalle de convergence.

**Exercice 8** *(Mines-Ponts 21)*

a) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que $H_n - \ln(n)$ tend vers une limite $\gamma \in \mathbf{R}$.

b) Justifier la convergence de $I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

c) Pour tout entier $n \geqslant 2$ on pose $I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t)\,\mathrm{d}t$.
Justifier l'existence de $I_n$ puis exprimer $I_n$ en fonction de $H_n$. En déduire que $I = -\gamma$.