Exercice 1 *(Mines-Télécom 2018)*

a) Trouver $a \in \mathbf{R}$ tel que $y(x) = \mathrm{e}^{ax}$ soit solution de : $(2x+1)\,y''(x) + (4x-2)\,y'(x) - 8y(x) = 0$.

b) Poser alors $y(x) = \mathrm{e}^{ax} z(x)$ pour déterminer toutes les solutions définies sur $\mathbf{R}$.

Exercice 2 *(Mines-Ponts 2018)* Soit l'équation différentielle (E) : $t\,y''(t) + 2\,y'(t) + t\,y = 0$.

a) Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.

b) Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbf{R}_+^*$, sur $\mathbf{R}_-^*$ et sur $\mathbf{R}$.

Exercice 3 *(Mines-Ponts 2021)*

Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tels que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{a+kb}$.

Exercice 4 *(Navale 2019)* Pour $n \geqslant 2$ on pose $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^n}{\sqrt{t} + t^{2n}}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que la suite (I_n) est bien définie et déterminer sa limite quand n tend vers l'infini.

Exercice 5 *(CCINP 2022)*

a) Justifier l'existence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{sh}\, t}\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que $\frac{\sin t}{\mathrm{sh}\, t} = 2\mathrm{e}^{-t} \sin(t) \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2nt}$.

c) En déduire que $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+(2n+1)^2}$. Puis, que $\frac{\pi}{4} < I < 1 + \frac{\pi}{4}$.

Exercice 6 *(CCINP 2021)* Soit $I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.

b) Montrer que $I_n \sim \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

c) En admettant $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, déterminer la valeur de $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7 *(Navale 2018)* Soit l'équation différentielle (E) : $x^2 y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = 1$.

Trouver une solution particulière, puis résoudre (E) sur $\mathbf{R}_+^*$ en posant $x = \mathrm{e}^t$.