Exercice 1 *(TPE-IVP 2019)* Montrer que $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)(t^2+a)}$ tend vers $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$ quand a tend vers 1 par valeurs inférieures. En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$.

Exercice 2 *(Mines-Télécom 23)*

a) Déterminer le domaine de définition D de $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)}\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que f est continue sur D.

c) Montrer que si $x \in D$ alors $(1-x) \in D$ et $f(x) = f(1-x)$.

Exercice 3 *(ENSEA 23)* On considère $F(x) = \int_0^{+\infty} \cos(2xt)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

b) Trouver une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par F.

c) En déduire l'expression de F, en admettant que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 4 *(CCINP 23)* On veut calculer $A = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$. On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$.

b) Montrer que f est C^1 sur $]0,+\infty[$.

c) Calculer $f(0)$ et déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$.

d) Montrer que $f'(x) = -A\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$, puis que $\int_0^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t = -2A^2$. En déduire la valeur de A.

Exercice 5 *(Mines-Ponts 23)* Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-xt}}{t}\sin(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Justifier l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$. En déduire l'existence de $f(x)$ pour $x \in \mathbf{R}_+$.

b) La fonction f est-elle continue sur $\mathbf{R}_+$?

c) Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$. En déduire une expression simple de $f(x)$.

Exercice 6 *(Mines-Ponts 22)* Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-x/t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbf{R}_+$.

b) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+^*$ et solution de $2xy''(x) + y'(x) - 2y(x) = 0$.

c) Résoudre cette équation différentielle en posant $y(x) = z\left(\sqrt{x}\right)$.

Exercice 7 *(Centrale 21)* Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

a) Avec Python, donner une représentation graphique de F.
Conjecturer l'intervalle de définition, le signe, le sens de variation et la limite en $+\infty$ de F.

b) Démontrer ces conjectures.

c) Monter que F vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre.
En déduire que F est de classe C^∞ sur un intervalle à préciser.

d) Montrer que $F(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ pour tout $x > 0$. En déduire la limite de $F(x)$ en 0^+.

e) Déterminer un équivalent simple de $F(x)$ quand x tend vers 0^+.