Exercice 1 *(Mines-Télécom 22)* Pour $n \in \mathbf{N}$ on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} \mathrm{d}t$.
Justifier l'existence de I_n puis déterminer sa limite lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 2 *(Mines-Télécom 22)* Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x\,t)}{t} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$.
Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et calculer $F'(x)$. En déduire $F(x)$.

Exercice 3 *(CCINP 22)* Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt^2) \exp(-t) \mathrm{d}t$.

a) Montrer que F est définie et de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.

b) Calculer $F^k(0)$ pour $k \in \mathbf{N}$. F est-elle développable en série entière ?

Exercice 4 *(CCINP 21)* Soit $F(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t} \mathrm{d}t$.

a) Montrer que F est définie et développable en série entière sur $]-1,1[$.

b) Montrer que F est de classe C^1 sur $]-1,1[$ et donner une expression simple de $F'(x)$.

c) Retrouver ainsi le développement en série entière de F.

Exercice 5 *(Centrale 22)* On pose $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x}$.

1) Déterminer le domaine de définition D de I.

2) a) En utilisant le module scipy integrate, tracer $I(x)$ pour $x \in]1,30]$.
Conjecturer les variations et les limites de I sur D.

b) Avec la méthode des rectangles calculer I(2).
Comparer avec la vraie valeur et avec celle obtenue avec scipy integrate.

3) a) Montrer que, pour $x > 1$, $f(t) = \ln(t)/t^x$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

b) Montrer que I est de classe C^1 sur D.

4) Calculer les limites de I aux bords de D.

5) a) Montrer que $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x} = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^{kx} \mathrm{d}t$.

b) En posant $u = 1/t$ montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x} = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^{kx+x-2} \mathrm{d}u$.

c) Avec Python, représenter graphiquement $x \mapsto 1 - 2\sum_{k=1}^{100} \frac{(-1)^k}{(kx)^2-1}$ pour $x \in]1,30]$.

d) Conjecturer puis établir une relation entre $I(x)$ et $1 - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(kx)^2-1}$.

6) Trouver un équivalent de $I(x)$ en 1.