Exercice 1 *(Centrale 23)* Soit E l'espace des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$.
Pour $f \in E$ et $x \in [0,1]$, on pose $T(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que $T \in GL(E)$.
2) Montrer que si f est propre pour T, alors f est solution d'une équation différentielle d'ordre 2.
3) Déterminer les éléments propres de T.

Exercice 2 *(ENSEA 23)* Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer le rang de A. En déduire, sans calcul, le polynôme caractéristique de A.
2) Déterminer les éléments propres de A. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 3 *(Mines-Télécom 23)* Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de T puis sans utiliser le polynôme caractéristique, donner les valeurs propres de T. T est-elle diagonalisable ?

Exercice 4 *(CCINP 23)* Soit $\alpha \in \mathbf{C}$ et A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ définie par : $A_{i,j} = \alpha^{i+j-2}$.

1) Déterminer le rang de A. En déduire ses valeurs propres.
2) Quelles sont les valeurs de α pour lesquelles A n'est pas diagonalisable ?

Exercice 5 *(CCINP 23)* Soit $a \in \mathbf{R}$ et $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2a & a+5 \end{pmatrix}$.

1) Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles M_a est diagonalisable ?
2) Trouver P telle que $M_{-1} = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
3) Trouver les matrices A telles que $A^2 = M_{-1}$.

Exercice 6 *(CCINP 23)*

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Que peut-on dire de $\det(A)$ s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $B^2 = A$?
2) Soit $a \in \mathbf{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 2+a & 2 & 1+a \\ 3-a & 3 & 3-a \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.
   Calculer $\det(A)$. En déduire une condition pour qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $B^2 = A$.
3) Désormais $a \geqslant 0$. Déterminer les éléments propres de A puis donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
4) Désormais $a \neq 1$ et $a \neq 3$. Montrer que si M est telle que $M^2 = D$ alors $MD = DM$.
   Déterminer les matrices M telles que $M^2 = D$. En déduire les matrices B telles que $B^2 = A$.

Exercice 7 *(Mines-Télécom 23)*
Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer le spectre de A.
2) Trouver une base de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle la matrice associée à u soit $T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3) Montrer que : $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Ker}(u^2) \bigoplus \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})$.
4) Résoudre le système différentiel : $x' = x + y - z$; $y' = -x + 3y - 3z$; $z' = 2x + 2y - 2z$.

Exercice 8 *(Mines-Ponts 23)* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

1) Trouver une relation entre le polynôme caractéristique de B et celui de A.
2) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Montrer que : $\dim E_\lambda(B) = \dim E_{\lambda^2}(A)$.
3) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que B soit diagonalisable.

Exercice 9 *(Centrale 23)*

Pour $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$ on pose $C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$

et $J = C(0, 1, 0, \dots, 0)$.

1) Écrire une fonction d'argument $n \in \mathbf{N}^*$ qui renvoie J^k pour $2 \leqslant k \leqslant n$.
   Tester la fonction pour $n = 5$. Commenter le résultat puis le justifier pour n quelconque.
2) Écrire une fonction d'argument une liste de réels L qui renvoie $C(L)$. Tester $C([2,3,4,5])$ puis donner ses valeurs propres et les comparer avec $2 + 3\mathrm{i}^k + 4(-1)^k + 5(-\mathrm{i})^k$ pour $0 \leqslant k \leqslant 3$.
3) Montrer que $C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.
   En déduire une justification de la question 2, puis la valeur de $\det(C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}))$.

Exercice 10 *(Mines-Télécom 23)* Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ et $B = \begin{pmatrix} I_n & O_n \\ A & A \end{pmatrix}$.
Montrer que si B est diagonalisable alors A est diagonalisable et $I_n - A$ inversible. Réciproque ?

Exercice 11 *(CCINP 23)* Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant : $A^3 + 9A = 0$.

1) Montrer que le spectre de A est inclus dans $\{0, 3\mathrm{i}, -3\mathrm{i}\}$.
2) A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$? dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$?
3) Montrer que si n est impair alors A n'est pas inversible.

Exercice 12 *(CCINP 23)* On considère trois suites définies par $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbf{R}^3$ puis les relations : $u_{n+1} = u_n - 2v_n - w_n$, $v_{n+1} = -u_n + v_n - w_n$, $w_{n+1} = -u_n - 2v_n + w_n$. On pose $X_n = (u_n, v_n, w_n)^\top$.

1) Trouver $A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$, puis exprimer X_n en fonction de X_0 et A.
2) A est-t-elle diagonalisable ? Triangulariser A puis exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 13 *(CCINP 23)* Soit A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. On suppose qu'il existe $C \neq 0$ telle que $AC = CB$.

1) Rappeler le théorème de Cayley-Hamilton.
2) a) Montrer que : $\forall k \in \mathbf{N}$, $A^k C = C B^k$. En déduire que : $\forall P \in \mathbf{C}[X]$, $P(A)\,C = C\,P(B)$.
   b) Montrer qu'un produit de deux matrices est inversible ssi ces deux matrices le sont.
   c) En déduire que A et B ont une valeur propre commune.
3) Réciproquement, si A et B ont une valeur propre commune, montrer qu'il existe une matrice C non nulle telle que $AC = CB$.

Exercice 14 *(Centrale 23)* Soit u un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$.
On suppose que u^2 est un projecteur de rang 1 mais que ni u ni $-u$ ne sont des projecteurs.
1) Montrez que tout projecteur de $\mathbf{R}^3$ est diagonalisable. 2) Étudier la diagonalisabilité de u.

Exercice 15 *(Mines-Ponts 23)* Soit $P = X^5 - 4X^4 + 2X^3 + 8X^2 - 8X$.

1) En remarquant que $P(2) = P'(2) = 0$, trouver la décomposition de P en facteurs irréductibles.
2) Trouver les matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $P(M) = 0$ et $\mathrm{tr}(M) = 0$.

Exercice 16 *(Mines-Ponts 23)* Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $\alpha \in \mathbf{R}^*$.
Déterminer les endomorphismes $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant : $\alpha u^3 = \mathrm{tr}(u^2)\,u$.