Exercice 1 *(Mines-Télécom 2022)* Soit $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x+\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est définie sur $]-1,+\infty[$.

b) Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$.

c) Donner une représentation graphique de f avec Python.

d) Montrer que f possède une limite en $+\infty$ et la déterminer.

Exercice 2 *(Mines-Télécom 2018)* Soit $f(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-tx}}{x}\,\mathrm{d}x$.

a) Déterminer le domaine de définition D de f.

b) Montrer que f est de classe C^1 sur D. Déterminer $f'(t)$ puis $f(t)$ pour $t\in D$.

Exercice 3 *(CCINP 2017)* Soit $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-xt^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Déterminer le domaine de définition D de f.

b) Montrer que f est de classe C^1 sur D. En déduire une expression de $f(x)$.

Exercice 4 *(Mines-Ponts 2019)* Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ définie par : $A_{i,i}=0$ et $A_{i,j}=i$.

a) Montrer que λ est valeur propre de A si et seulement si $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+\lambda}=1$.

b) En déduire que A est diagonalisable et localiser les valeurs propres de A.

c) Déterminer la somme des valeurs propres de A. On note μ_n la plus grande de ces valeurs. Trouver $C\in\mathbf{R}$ tel que $\mu_n\sim Cn^2$ quand n tend vers l'infini.

Exercice 5 *(Mines-Ponts 22)* Soit $A\in\mathscr{M}_{n+1}(\mathbf{R})$ de coefficients :
$A_{i,i+1}=i$ pour $1\leqslant i\leqslant n$; $A_{i+1,i}=n-i+1$ pour $1\leqslant i\leqslant n$; les autres coefficients étant nuls.

a) Trouver un endomorphisme φ de $\mathbf{R}_n[X]$ tel que A soit la matrice de φ dans la base canonique.

b) Trouver les valeurs propres et vecteurs propre de A. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 6 *(Centrale 2022)*

1. Pour $x\in\mathbf{R}$, déterminer la limite de $(1+x/n)^n$ quand n tend vers l'infini.
2. Pour $n\in\mathbf{N}^*$, on considère la matrice $A_n=\begin{pmatrix}1&1/n&1/n\\1/n&1&1/n\\1/n&1/n&1\end{pmatrix}$
   (a) Écrire une fonction prenant en argument n et renvoyant A_n
   (b) Conjecturer la limite de A_n^n quand n tend vers l'infini.
   (c) Diagonaliser A_n et démontrer la conjecture.
3. Soit m un entier supérieur ou égal à 3. On note $A(m,n)$ la matrice carrée de $\mathscr{M}_m(\mathbf{R})$ avec des 1 sur la diagonale et $1/n$ ailleurs, J_m la matrice de $\mathscr{M}_m(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients valent 1.
   (a) Exprimer $A(m,n)$ en fonction de I_m et J_m.
   (b) Écrire une fonction d'argument (m,n) qui renvoie $A(m,n)$
   (c) Conjecturer la limite de $A(m,n)^n$ quand n tend vers l'infini.
   (d) Que vaut J_m^n ?
   (e) En déduire la limite de $A(m,n)^n$ quand n tend vers l'infini.