Définition 1 On appelle *isométrie vectorielle* tout endomorphisme qui conserve la norme.

Remarque 1 Une isométrie vectorielle est un automorphisme.
Un endomorphisme est une isométrie si, et seulement si, il conserve le produit scalaire.
Ou encore si, et seulement si, l'image d'une base orthonormée est une base orthonormée.

Proposition 1 L'ensemble $O(E)$ des isométries d'un espace euclidien E constitue un groupe.

Proposition 2 Si $u \in O(E)$ et si F est un sous-espace stable par u, $F^{\perp}$ l'est aussi.

Définition 2 Une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est dite *orthogonale* lorsque $A^{\top}A = I_n$.

Remarque 2 Cela revient à dire que les colonnes (ou les lignes) de A sont orthonormées.

Proposition 3 M est orthogonale $\iff$ M représente une isométrie dans une base orthonormale
$\iff$ M représente un changement de bases orthonormales

Remarque 3 L'ensemble $O_n(\mathbf{R})$ des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ constitue un groupe, dont $SO_n(\mathbf{R}) = O_n(\mathbf{R}) \cap SL_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe.

Proposition 4 $SO_2(\mathbf{R}) = \left\{\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} ; t \in \mathbf{R}\right\}$ est un groupe commutatif, isomorphe à $\mathbb{U}$.
Les autres isométries du plan sont des réflexions droites.

Définition 3 On dit que deux bases orthonormales ont même *orientation* lorsque la matrice de passage de l'une vers l'autre a un déterminant égal à 1. On dit qu'une base orthonormale de $\mathbf{R}^n$ est directe lorsqu'elle a la même orientation que la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Remarque 4 Si E est orienté, le déterminant d'une famille de vecteurs $(e_1, \ldots, e_n)$ dans une base orthonormée directe de E ne dépend pas de cette base : c'est le *produit mixte*, noté $[e_1, \ldots, e_n]$.

Définition 4 Le *produit vectoriel* dans $\mathbf{R}^3$ est défini par : $\forall z \in \mathbf{R}^3,\ [x, y, z] = (x \times y) \cdot z$.

Remarque 5 i) $(x \times y)$ est orthogonal à x et à y.
ii) Expression de $(x \times y)$ dans une base orthonormée directe.
iii) $\|x \times y\| = \|x\| \|y\| \sin(\theta)$ où $\theta \in [0, \pi]$ est défini par : $\langle x, y\rangle = \|x\| \|y\| \cos(\theta)$.
iv) Si x et y sont orthogonaux et normés, $(x, y, x \times y)$ est une base orthonormée directe.

Proposition 5 Pour toute isométrie vectorielle u d'un espace euclidien E de dimension 3, il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon = \det(u)$ et $R \in SO_2(\mathbf{R})$.

Remarque 6 Le signe de l'angle d'une rotation dépend du choix d'orientation de l'axe.

Définition 5 Un endomorphisme u est dit *autoadjoint* lorsque : $\forall (x, y) \in E,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$.

Remarque 7 Un projecteur est orthogonal si, et seulement si, il est autoadjoint.

Proposition 6 Un endomorphisme est autoadjoint si, et seulement si, sa matrice dans une (et finalement dans toute) base orthonormée est symétrique.

Théorème spectral Tout autoadjoint admet une base orthonormée de vecteurs propres.

Proposition 7 Si u est autoadjoint, $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbf{R}_+$ (resp.$\mathbf{R}_+^*$) $\iff$ $\forall x \neq O_E,\ \langle x, u(x)\rangle \geqslant 0$ (resp. > 0)

Définition 6 On dit alors que u est *autoadjoint positif* (resp. *autoadjoint défini positif*).
On note $\mathscr{S}^{+}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs, $\mathscr{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs et, pour les matrices, $\mathscr{S}_n^{+}(\mathbf{R})$ et $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.