Exercice 1 *(CCINP 23)* Soit $A \in GL_2(\mathbf{R})$ vérifiant : $A^2 = A^\top$.

1) Trouver un polynôme annulateur de A puis montrer que $A \in O_2(\mathbf{R})$.
2) Calculer le déterminant de A puis donner toutes les matrices solutions.

Exercice 2 *(CCINP 23)* Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant $(*)$: $M^\top M = M M^\top$ et $M^2 + 2I_n = 0$.

1) Justifier la diagonalisabilité de $M^\top M$.
2) Trouver un polynôme annulateur, puis les valeurs propres, de $M^\top M$.
3) Montrer que $\frac{1}{\sqrt{2}}M$ est orthogonale puis donner, pour $n = 2$, toutes les matrices M vérifiant $(*)$.

Exercice 3 *(CCINP 23)* Soit A et B deux matrices de $O_n(\mathbf{R})$ telles que $M = \frac{1}{3}(A + 2B) \in O_n(\mathbf{R})$.

1) Calculer $AB^\top + BA^\top$.
2) Trouver un polynôme annulateur de $C = AB^\top$.
3) Montrer que $\operatorname{Ker}(C - I_n)$ et $\operatorname{Im}(C - I_n)$ sont supplémentaires orthogonaux.
4) Montrer finalement que $A = B$.

Exercice 4 *(CCINP 23)*
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$.

1) Montrer que f est une rotation ssi a, b et c vérifient 3 équations à déterminer.
2) Montrer que f est une rotation ssi a, b et c sont racines de $X^3 - X^2 + p = 0$, avec $p \in [0, 4/27]$.
3) Si $b = c \neq 0$ déterminer l'axe de direction de la rotation et la valeur de l'angle.

Exercice 5 *(CCINP 23)* Soit A une matrice symétrique réelle.

1) Justifier l'existence d'un vecteur propre pour A.
2) Soit X un tel vecteur, on pose $B = \begin{pmatrix} A & XX^\top \\ XX^\top & A \end{pmatrix}$ et $Y_a = \begin{pmatrix} X \\ aX \end{pmatrix}$.
   Pour quelle valeurs de a le vecteur Y_a est-il propre pour B ?
3) B est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une base de vecteurs propres.
4) Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ trouver un polynôme annulateur de B de degré 3.

Exercice 6 *(Navale 23)* Soit E un espace euclidien, $\lambda \in \mathbf{R}^*$ et $v \in E \setminus \{0_E\}$.

a) Montrer que $f : x \mapsto x + \lambda\langle v, x\rangle \cdot v$ est autoadjoint, puis préciser ses valeurs propres.
b) À quelle condition (nécessaire et suffisante) f est-elle une isométrie ?

Exercice 7 *(Centrale 23)* Soit E un espace euclidien, u un endomorphisme de E, $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E et A la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$. On note u^* l'endomorphisme de E représenté par $A^\top$ dans la base $\mathscr{B}$.

1) Soit $\mathscr{B}'$ une autre base orthonormée de E et A' la matrice de u dans cette nouvelle base.
   Déterminer la matrice de u^* dans $\mathscr{B}'$.
   En déduire que la définition de u^* ne dépend pas de la base orthonormée considérée.
2) Montrer que u^* est caractérisé par : $\forall (x, y) \in E \times E,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$.
3) Montrer que $u^* \circ u$ est un endomorphisme autoadjoint positif.

Exercice 8 *(X 22)* Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. Montrer que A est de trace nulle si, et seulement si, il existe $P \in O_n(\mathbf{R})$ telle que $PAP^\top$ soit à diagonale nulle.