Exercice 1 *(Mines-Télécom 22)*
Diagonaliser $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ puis résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = y-z \\ y' = 2x+y+z \\ z' = -2x-y-z \end{cases}$

Exercice 2 *(CCINP 22)* Soit f un endomorphisme d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel E de dimension finie.

a) Montrer que si f est diagonalisable alors f^2 aussi.
b) Montrer que si f est diagonalisable alors $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.
c) Soit λ une valeur propre non nulle de f^2 et μ une racine carrée complexe de λ.
Montrer que : $\mathrm{Ker}(f^2 - \lambda \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(f - \mu \mathrm{Id}_E) \bigoplus \mathrm{Ker}(f + \mu \mathrm{Id}_E)$.
d) Montrer que si f^2 est diagonalisable et inversible, alors f est diagonalisable et inversible.
e) Montrer que si f^2 est diagonalisable, f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

Exercice 3 *(CCINP 22)* Soit a l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que a est trigonalisable mais pas diagonalisable.
b) Déterminer les droites stables par a.
c) Montrer que si a' est la restriction de a à un sous-espace stable par a, alors $\chi_{a'}$ divise χ_a .
d) Déterminer les plans stables par a.

Exercice 4 *(Mines-Ponts 22)* Soit f, u et v trois endomorphismes d'un espace de dimension finie. On suppose qu'il existe des scalaires non nuls et distincts a et b tels que : $f = au + bv$, $f^2 = a^2 u + b^2 v$ et $f^3 = a^3 u + b^3 v$. Montrer que f est diagonalisable. Déterminer $u(x)$ et $v(x)$ lorsque x est propre pour f. En déduire que u, v et $u+v$ sont des projecteurs.

Exercice 5 *(CCINP 21)* Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ vérifiant $M^2 + M^T = I_n$.

a) Montrer que si M est symétrique alors M est diagonalisable et $\mathrm{tr}(M)\det(M) \neq 0$.
b) Montrer que M est diagonalisable même si elle n'est pas symétrique.
c) Montrer que M est inversible si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de M.

Exercice 6 *(CCINP 22)*
Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ayant le même polynôme caractéristique, noté P.

a) Montrer que si P possède n racines distinctes alors A et B sont semblables.
b) Montrer que ce résultat tombe en défaut si P n'est pas scindé à racines simples.

Exercice 7 *(Centrale 22)*
Pour $n \in \mathbf{N}^*$ soit $M_n \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par $[M_n]_{i,i} = 0$ et $[M_n]_{i,j} = j$ pour $j \neq i$.
On considère également $f_n(x) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{x+k}$.

1) Écrire des fonctions Python renvoyant M_n et $f_n(x)$.
2) Pour $n \in \{2,3,5,10\}$ déterminer les valeurs propres de M_n et les dimensions des sous-espaces propres. Conjecture ?
3) Pour $n \in \{2,3,5,10\}$ représenter graphiquement $f_n(x)$ pour $x \in [-15,15]$ avec un pas de 0.01. Déterminer des valeurs approchées des solutions de l'équation $f_n(x) = 0$. Conjecture ?
4) Étudier les variations de f_n puis déterminer d_n le nombre de solutions de l'équation $f_n(x) = 0$, ainsi que le signe de la solution la plus grande.
5) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Trouvez une condition nécessaire et suffisante pour que $X_\lambda = (1/(1+i+\lambda))_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ soit un vecteur propre de M_n.