Définition 1 Une norme sur un espace vectoriel E est une application $N : E \to \mathbf{R}_+$ vérifiant :
i) $N(x) = 0 \iff x = 0_E$ *(séparation)*
ii) $\forall\, x \in E,\ \forall\, \lambda \in \mathbf{K},\ N(\lambda \cdot x) = |\lambda| N(x)$ *(homogénéité)*
iii) $\forall\, (x, y) \in E \times E,\ N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ *(inégalité triangulaire)*

Définition 2 Boules ouvertes et boules fermées ; sphères ; parties bornées ; parties convexes.

Remarque 1 Une boule est toujours convexe ; et symétrique par rapport à son centre.

Exemples fondamentaux
1) Norme associée à un produit scalaire dans un espace préhilbertien réel.
2) Normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbf{K}^n$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.
3) Norme $\|\cdot\|_\infty$ sur un espace de fonctions bornées à valeurs dans $\mathbf{K}$.

Remarque 2 Convergence et propriétés usuelles des suites à valeurs dans un evn.

Définition 3 Deux normes N_1 et N_2 sont dites équivalentes lorsqu'existent deux réels α et β tels que : $\forall x \in E,\ N_1(x) \leqslant \alpha N_2(x)$ et $N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$.

Proposition 1 Si deux normes sont équivalentes, toute suite bornée pour l'une l'est aussi pour l'autre ; et toute suite convergente pour l'une converge pour l'autre *vers la même limite.*

Définition 4 Un point a est dit intérieur à une partie A lorsqu'il existe une boule centrée en a, de rayon non nul, incluse dans A. L'intérieur d'une partie est l'ensemble des points intérieurs à cette partie. Une partie est dit ouverte lorsqu'elle est égale à son intérieur.

Proposition 2 Tout réunion d'ouverts est un ouvert. Idem pour toute intersection *finie.*

Définition 5 Une partie d'un evn est dite fermée lorsque son complémentaire est ouvert.

Proposition 3 Caractérisation séquentielle des parties fermées.

Remarque 3 Une boule ouverte est un ouvert. Une boule fermée, une sphère, sont des fermés.

Définition 6 On dit que x est adhérent à une partie A lorsque $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|a - x\| = 0$.
L'adhérence d'une partie est l'ensemble des points adhérents à cette partie.
On dit qu'une partie est dense lorsque son adhérence est l'espace tout entier.

Proposition 4 Caractérisation séquentielle de l'adhérence.

Remarque 4 Ces trois notions, dites *topologiques,* sont invariantes par normes équivalentes.

Définition 7 Limite d'une fonction en un point adhérent à son ensemble de définition.

Proposition 5 Caractérisation séquentielle ; propriétés algébriques ; composition.

Remarque 5 Continuité, continuité des fonctions lipschitziennes.

Proposition 6 Image réciproque d'un ouvert (resp. d'un fermé) par une application continue.

Théorème 1 Sur un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Corollaire 1 La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace de dimension finie revient à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.

Corollaire 2 Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales.

Théorème 2 Toute fonction continue sur une partie fermée bornée non vide d'un espace de dimension finie, à valeurs réelles, est bornée et atteint ses bornes.