Exercice 1 *(Centrale 18)* Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1 a) Déterminer le polynôme caractéristique de M que l'on appellera P.

b) Représenter graphiquement $P(x)$ pour x variant de -1 à 3.

c) Montrer que M n'admet qu'une seule valeur propre réelle, comprise entre 1 et 2.

d) Soit z une valeur propre complexe de M. Montrer $|z| \in \left]1/\sqrt{2}, 1\right[$.

2 Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \operatorname{tr}(M^n)$ et $v_n = \cos(\pi u_n)$.

a) Montrer qu'il existe des réels a et b tels que, pour tout entier naturel n, $M^{n+3} = aM^{n+1} + bM^n$.

b) Calculer les 10 premières valeurs de u_n et de v_n.

c) Écrire un script permettant de représenter la ligne brisée $f(k) = v_k$ pour k allant de 0 à n. Afficher le résultat pour $n = 21$.

d) Montrer que la suite de terme général v_n est périodique et donner sa période.

e) Montrer que la suite de terme général $w_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ n'est pas bornée.

Exercice 2 *(Centrale 22)* On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifie la propriété $\mathscr{P}$ lorsque ses coefficients sont positifs et vérifient : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} M_{i,j} = 1$.

a) Montrer que l'ensemble des matrices vérifiant $\mathscr{P}$ est stable par multiplication.

Dans toute la suite, on considère une matrice M satisfaisant la propriété $\mathscr{P}$.

b) Montrer que 1 est valeur propre de M.

c) Montrer que toute valeur propre de M est de module inférieur ou égal à 1.

d) Montrer que si X est propre pour M pour une valeur propre de module 1, alors le vecteur dont les coordonnées sont les modules de celles de X est propre pour 1.

Exercice 3 *(CCINP 22)* Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
On cherche un endomorphisme g de $\mathbf{R}^3$ tel que $g^2 = f$.

a) Déterminer les éléments propres de f. f est-elle diagonalisable ?

b) Montrer que tout vecteur propre pour g est nécessairement propre pour f.

c) g peut-il être diagonalisable ? Quel est son spectre ? Le problème a-t-il des solutions ?

Exercice 4 *(CCINP 22)* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant $A^3 - A^2 + A - I_n = 0_n$.
Montrer que le déterminant de A vaut 1 et que la trace de A est un entier naturel.

Exercice 5 *(Centrale 16)* On considère $A(s,t) = \begin{pmatrix} t & t & t & t \\ s & t & t & t \\ s & s & t & t \\ s & s & s & t \end{pmatrix}$

1) *Au tableau*

   a) Montrer que l'ensemble de ces matrices est un espace vectoriel, et donner sa dimension.

   b) Montrer qu'il existe une unique valeur t_0 telle que $A(0,t)$ soit diagonalisable.

   c) Montrer que pour tout t différent de t_0, $A(0,t) - t\,I_4$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) *Avec Python*

   a) Écrire une fonction $A(s,t)$ qui renvoie $A(s,t)$.

   b) Donner les matrices $A(1,i)$ pour $i \in \{1,2,3,4,5\}$.

   c) Montrer *avec Python* qu'elles sont toutes diagonalisables.

   d) Choisir 3 réels t au hasard et afficher la matrice $A(1,t)$.

   e) Formuler une conjecture.

3) Soit $t > 0$.

   a) Montrer que $t^{1/4} + t^{1/2} + t^{3/4} + t$ est valeur propre pour $A(1,t)$.

   b) « Il y avait deux autres questions »

Exercice 6 *(CCINP 21)* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$.

a) Donner le rang de B en fonction de celui de A.

b) Montrer que, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} + P(0)\begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$.

c) On suppose que A est diagonalisable. Montrer que B l'est aussi et donner ses valeurs propres.

Exercice 7 *(Centrale 19)*

a) Donner la définition et deux caractérisations de la diagonalisabilité.

b) À quelles conditions $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 2 & 0 \\ d & e & f & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

c) Les conditions ci-dessus étant remplies, diagonaliser effectivement A.

Exercice 8 *(CCINP 21)* Soit $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & -C^T \\ C & I_n \end{pmatrix}$.
Calculer $M^T M$. En déduire que M est inversible, puis montrer que $M^{-1}M^T$ est orthogonale.

Exercice 9 *(Mines-Ponts 19)* Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E.
Montrer que deux des propriétés suivantes entraînent la troisième :
(i) u est une isométrie (ii) $u^2 = -\mathrm{id}$ (iii) pour tout $x \in E$, $\langle u(x) | x \rangle = 0$.