Exercice 1 *(Centrale 16)* Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ antisymétrique, on pose : $M_A = (I_n - A)^{-1}(I_n + A)$.

a) Justifier l'existence de M_A.

b) Écrire en *Python* une fonction prenant A en argument et renvoyant M_A.

c) Vérifier sur des exemples que M_A est orthogonale, puis le prouver mathématiquement.

d) Soit $a = (3, 12, -4)^T$ et A la matrice de dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ de l'endomorphisme défini par $x \mapsto a \wedge x$. En utilisant *Python*, montrer que M_A est une matrice de rotation et donner ses éléments caractéristiques.

Exercice 2 *(Centrale 22)*
Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien E et $f \in \mathscr{L}(E)$.

a) Exprimer $\sum_{k=1}^{n} \left\| f(e_k) \right\|^2$ à partir de la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

b) Montrer que cette somme ne dépend pas de la base orthonormée considérée.

c) Soit $T(f)$ cette somme. Montrer que si λ est une valeur propre de f, alors $T(f) \geq \lambda^2$.

d) Montrer que si f est un projecteur alors $T(f) \geqslant \mathrm{rg}(f)$. Cas d'égalité ?

Exercice 3 *(Mines-Ponts 21)*
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base d'un espace euclidien E. Pour $x \in E$ on pose $u(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x \rangle \cdot e_k$.

a) Montrer que u est un endomorphisme autoadjoint défini positif.

b) En déduire qu'il existe un automorphisme autoadjoint v de E tel que $u^{-1} = v^2$. Y a-t-il unicité ?

c) Soit v un tel automorphisme. Montrer que $(v(e_1), \ldots, v(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Exercice 4 *(CCINP 22)* Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $M^3 = I_n$ et $M^\top M = M M^\top$.
Montrer que $M \in O_n(\mathbf{R})$. Précsier les matrices solutions pour $n = 3$.

Exercice 5 *(Centrale 22)*
Soit E_n l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ à coefficients strictement positifs.

1) En utilisant la commande random, écrire une fonction qui renvoie une matrice de E_n.
2) Écrire une fonction qui renvoie les valeurs propres d'une matrice de E_n.
   Tester plusieurs valeurs de n afin de conjecturer le signe des valeurs propres.
3) Soit $A \in E_n$ de valeurs propres $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$ constituée de vecteurs propres associés à ces valeurs.
   a) Avec Python, déterminer pour différentes valeurs de n les λ_i et les X_i.
      Que peut-on conjecturer concernant les coefficients deX_n ?
   b) Montrer que : $\forall Y \in \mathbf{R}^n,\ Y^\top A\, Y \leqslant \lambda_n \|Y\|^2$. Cas d'égalité ?
   c) En considérant le vecteur Z_n dont les coordonnées sont les valeurs absolues de celles de X_n, démontrer le résultat précédemment conjecturé.
4) On considère $M = \begin{pmatrix} A & aX_n \\ aX_n^\top & 0 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbf{R}$.
   a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de A, puis de M pour certaines valeurs de a.
   b) Déterminer dans le cas général les valeurs propres de M. (On exprimera χ_M à l'aide de χ_A)
   c) Il y avait une dernière question…

Exercice 6 *(Mines-Ponts 21)* Dans un espace euclidien E, soit p et q deux projecteurs orthogonaux, respectivement sur des sous-espaces F et G.

a) Montrez que $p \circ q \circ p$ est un endomorphisme symétrique.
b) Montrez que E est la somme directe orthogonale de $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Ker}(q)$ et de $\mathrm{Im}(q) \cap \mathrm{Ker}(p)$.
c) Montrez que $p \circ q$ est diagonalisable, avec un spectre inclus dans $[0, 1]$.

Exercice 7 *(Mines-Ponts 17)* Soit p et q deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien.

a) Prouver que le polynôme caractéristique de $u = p + q$ est scindé sur $\mathbf{R}$.
b) Prouver que les valeurs propres de u appartiennent au segment $[0, 2]$.
c) Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})$.