Exercice 1 *(Mines-Télécom 23)*

1) Pour $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ on pose : $N(x,y)=\max\left(|y|,\left|x+\frac{1}{2}y\right|,|x+y|\right)$.
Vérifier que l'on définit ainsi une norme sur $\mathbf{R}^2$ et représenter sa boule unité.

2) Soit $(\varphi_1,\dots,\varphi_p)$ une famille de formes linéaires sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E de dimension n.
À quelle condition $N\colon x\mapsto \max\left\{\left|\varphi_i(x)\right|\;;\;1\leqslant i\leqslant p\right\}$ est-elle une norme sur E ?

Exercice 2 *(CCINP 21)* Soit $a\in\mathbf{R}$, pour $P\in\mathbf{R}[X]$ on pose : $N_a(P)=|P(a)|+\int_0^1|P'(t)|\mathrm{d}t$.

a) Montrer que N_a est une norme sur $\mathbf{R}[X]$.

b) Montrer que si une suite de vecteurs converge dans une espace vectoriel normé,
alors la suite des normes de ces vecteurs converge vers la norme de la limite de cette suite.

c) Pour quelles valeurs de a la suite des $P_n=\left(\frac{X}{2}\right)^n$ est-elle convergente pour N_a ?

Exercice 3 *(Mines-Ponts 19)* Soit $E=\mathscr{C}^1([0,1],\mathbf{R})$ et $\varphi\in E$ telle que $\int_0^1\varphi(t)\,\mathrm{d}t\neq 0$.
On pose, pour toute $f\in E$, $N(f)=|f(0)|+\int_0^1|f'(t)|\mathrm{d}t$ et $N_\varphi(f)=\left|\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right|+\int_0^1|f'(t)|\mathrm{d}t$.
Montrer que N et N_φ sont des normes équivalentes sur E.

Exercice 4 *(Mines-Ponts 19)* Soit A une partie ouverte d'un espace vectoriel normé E.
Montrer que $\bigcup_{a\in A}\overline{B}(a,1)$ est une partie ouverte de E. ($\overline{B}(a,1)$ désignant la boule fermée)

Exercice 5 *(Mines-Ponts 19)* Soit E un espace vectoriel normé et $f:E\to E$, $x\mapsto\frac{x}{1+\|x\|}$.
Montrer que f est une bijection continue de E sur la boule unité ouverte de E.

Exercice 6 *(Centrale 23)* L'espace E des applications continues de $[-1,1]$ dans $\mathbf{R}$ est muni de la norme $\|f\|_\infty=\sup\left\{\|f(x)\|\;;\;x\in[-1,1]\right\}$.

1) Montrer qu'une forme linéaire est continue sur E si et seulement si elle est continue en 0_E.

2) On pose $\varphi(f)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\int_{-1}^0 f(t)\mathrm{d}t$. Déterminer $\sup\left\{\varphi(f)\;;\;\|f\|_\infty=1\right\}$.

Exercice 7 *(Centrale 22)*

a) Soit M et N deux matrices semblables de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.
Monter que pour tout $P\in\mathbf{C}[X]$, $P(M)$ et $P(N)$ sont semblables.

b) Soit A une matrice diagonalisable de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ et $(B_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de matrices semblables à A, convergeant vers une matrice B. Montrer que B est semblable à A.

c) Ce résultat subsiste-t-il si A n'est pas diagonalisable ?

Exercice 8 *(Centrale 13)* Soit K une partie convexe d'un espace de dimension finie E, fermée, bornée, telle que 0 soit intérieur à K et centre de symétrie de K. On pose $J_K(0)=0$, et pour $x\neq 0$, $J_K(x)=\inf\left\{r>0,\frac{1}{r}\cdot x\in K\right\}$. Montrez que J_K définit une norme sur E, dont la boule unité est K.

Exercice 9 *(Mines-Ponts 17)* Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies.
Montrer qu'une application f de E dans F est continue si, et seulement si, pour toute partie A de E, l'image de l'adhérence de A est incluse dans l'adhérence de l'image de A.

Exercice 10 *(Mines-Ponts 17)* Dans $\mathbf{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique,
soit K une partie convexe, fermée, bornée, ne contenant pas le vecteur nul.
a) Montrer qu'il existe $u\in K$ tel que $\|u\|=\inf_{x\in K}\|x\|$. b) Montrer que $\langle u,x\rangle\geqslant 0$ pour tout $x\in K$.