Exercice 1 *(TPE-IVP 19)* À quelle condition sur les réels p et q la matrice $A = \begin{pmatrix} p & 0 & q \\ q & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle orthogonale ? Déterminer alors les éléments caractéristiques de A.

Exercice 2 *(CCINP 17)* Soit a et b deux vecteurs non colinéaires d'un espace euclidien E.
Pour tout x de E on pose : $u(x) = \langle a, x\rangle\, b + \langle b, x\rangle\, a$.

a) Vérifier que u est un endomorphisme de E puis déterminer son image et son noyau.

b) Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de u.

c) Montrer que u est symétrique.

Exercice 3 *(CCINP 22)* Soit E un espace euclidien.

a) Caractérisation des endomorphismes autoadjoints définis positifs ?

b) Soit a et b deux endomorphismes autoadjoints définis positifs.
Montrer qu'il existe un unique endomorphisme c vérifiant $b = a \circ c + c \circ a$.

c) Montrer que c est symétrique et positif.

Exercice 4 *(CCINP 21)* Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $M\left(M^\top M\right)^2 = I_n$.
a) Montrer que M est inversible. b) Montrer que M est symétrique. c) Montrer que $M = I_n$.

Exercice 5 *(Mines-Ponts 14)* On munit $\mathbf{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

a) Montrer que $N(A) = \sup\{\|AX\|_2\,;\, \|X\|_2 = 1\}$ définit une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

b) Montrer que $N(A) = \max\{\sqrt{\lambda}\,;\, \lambda \in \mathrm{Sp}(A^T A)\}$

Exercice 6 *(TPE-IVP 18)* Pour $P \in \mathbf{R}[X]$, $N_1(P) = \sum_{k=0}^{\infty} \left|P^{(k)}(0)\right|$ et $N_2(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|$.

a) Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbf{R}[X]$.

b) Soit $P_n = \frac{1}{n!}X^n$. Étudier la convergence de la suite (P_n) pour les normes N_1 et N_2 .

Exercice 7 *(CCINP 21)* Soit E l'ensemble des fonctions f de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ telles que $f(0) = 0$. Pour $f \in E$ on pose $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ et $N'(f) = \|f + f'\|_\infty$.

a) Montrer que N et N' sont des normes sur E.

b) Montrer que : $\forall f \in E,\ \forall x \in [0,1]$, $\mathrm{e}^x f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^t (f(t) + f'(t))\mathrm{d}t$.

c) Montrer que N et N' sont équivalentes.

Exercice 8 *(CCINP 14)* Vérifier que l'on définit deux normes sur l'espace E des suites bornées de nombres complexes en posant $N_1(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{n!}$ et $N_2(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$.
Montrer que $N_1 \leqslant 2N_2$ mais que ces deux normes ne sont pas équivalentes.