Définition 1 Soit f une fonction définie sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbf{R}^n$.
On dit que f est dérivable en t_0 lorsque $\frac{1}{t-t_0}\cdot\big(f(t)-f(t_0)\big)$ admet une limite quand t tend vers t_0.
Cette limite est alors appelée dérivée de f en t_0, et notée $f'(t_0)$.

Remarque 1 Cela équivaut à la dérivabilité en t_0 des coordonnées de f dans la base canonique.

Remarque 2 Cela revient à dire que f admet un développement limité à l'ordre 1 en t_0.

Proposition 1 Une combinaison linéaire d'applications dérivables en t_0 est dérivable en t_0.

Proposition 2 Si L est une application linéaire sur $\mathbf{R}^n$ et f dérivable en t_0 alors $L\circ f$ est dérivable en t_0, avec $\big(L\circ f\big)'(t_0)=L\big(f'(t_0)\big)$.

Proposition 3 Si M est multilinéaire et $f_1,\dots,f_p$ dérivables en t_0 alors $g\colon t\mapsto M\big(f_1(t),\dots,f_p(t)\big)$ est dérivable en t_0, avec $g'(t_0)=\sum_{k=1}^{p} g_k(t_0)$ où $g_k(t_0)$ est $g(t_0)$ où l'on a remplacé $f_k(t_0)$ par $f_k'(t_0)$.

Exemple : Soit $\Delta_n(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \cdots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$. Calculer $\Delta_n'(x)$; en déduire la valeur de $\Delta_n(x)$.

Proposition 4 Si $\varphi : J\to I$ est dérivable en t_0 et f dérivable en $\varphi(t_0)$ alors $f\circ\varphi$ est dérivable en t_0, avec $\big(f\circ\varphi\big)'(t_0)=\varphi'(t_0)\cdot f'\big(\varphi(t_0)\big)$

Définition 2 Pour $k\geqslant 1$, on dit que f est de classe C^k sur I lorsque f est dérivable sur I et f' de classe C^{k-1} sur I. On dit que f est de classe C^∞ lorsqu'elle est de classe C^k pour tout $k\geqslant 1$.

✍ ✍

Exercice 1 *(Centrale 2012)*
Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des applications C de $\mathbf{R}$ dans $SL_4(\mathbf{R})$ dérivables en 0, telles que $C(0)=I_4$.

a) Montrer que $\mathscr{C}$ est stable par multiplication.

b) En déduire que $H=\{C'(0)\,;\ C\in\mathscr{C}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbf{R})$.

c) Montrer que H contient les matrices $E_{i,j}$ pour $i\neq j$; ainsi que $E_{1,1}-E_{i,i}$ pour $2\leqslant i\leqslant 4$.

d) Montrer que H est l'ensemble des matrices de trace nulle.

Exercice 2 *(TPE-IVP 2019)*
Soit M une application de classe C^1 de $\mathbf{R}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant : $\forall t\in\mathbf{R},\ M^2(t)=M(0)=I_n$.

a) Montrer que $M(t)$ est diagonalisable pour tout réel t.

b) Montrer que $M'(t)=-M(t)M'(t)M(t)$. En déduire que la trace de $M(t)$ est constante.

c) Déterminer $M(t)$ pour $t\in\mathbf{R}$.