Exercice 1 *(Centrale 2021)*

a) La matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?
Est-elle limite d'une suite de matrices diagonalisables ?

b) Soit $P \in \mathbf{R}[X]$, de degré n, normalisé.
Montrer que P est scindé sur $\mathbf{R}$ ssi : $\forall z \in \mathbf{C},\ |P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^n$.

c) Soit (A_k) une suite de matrices diagonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ convergeant vers une matrice A.
Montrer que A est trigonalisable sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Exercice 2 *(TPE-IVP 2011)*
Soit E l'espace des fonctions de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ nulles en 0.

a) Montrer que l'on définit une norme sur E en posant : $N(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$.

b) Comparer cette norme à celle de la convergence uniforme.

Exercice 3 *(TPE-IVP 2015)* Pour $u = (x, y)$ on pose $N(u) = \sup\left\{|x + ty|,\ t \in [0,1]\right\}$.

a) Montrer que $N(u) = \max\big(|x|, |x + y|\big)$. En déduire que N est une norme.

b) Représenter la boule unité B de N.

c) Trouver le plus petit disque euclidien centré en l'origine contenant B.

d) Trouver le plus grand disque euclidien centré en l'origine contenu dans B.

Exercice 4 *(Centrale 2013)* Soit A une partie non vide et convexe d'un espace vectoriel normé E de dimension finie, et $R > 0$. Montrer que $A(R) = \{x \in E\ ;\ d(x, A) \leqslant R\}$ est convexe et fermé.

Exercice 5 *(Mines-Ponts 2018)* Soit E l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$.
On note K l'application de E dans $\mathbf{R}_+$ qui à f associe la borne inférieure de l'ensemble des k tels que f soit k-lipschitzienne.

a) Montrer que E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

b) Montrer que K est bien définie. Est-ce une norme ?

c) Montrer qu'on définit une norme sur E en posant $N(f) = K(f) + \big|f(0)\big|$.

d) Montrer que : $\forall f \in E,\ \|f\|_\infty \leqslant N(f)$.

Exercice 6 *(Mines-Ponts 2013)* Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ dont le spectre est réduit à une seule valeur a.
Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :
(i) $|a| < 1$ (ii) $\sum_{k=0}^{p} M^k$ converge quand p tend vers l'infini (iii) $\lim_{p\to+\infty} M^p = 0_n$

Exercice 7 *(Mines-Ponts 2011)* Soit u un endomorphisme d'un espace de dimension finie E.
On suppose qu'il existe une norme sur E telle que u soit 1-lipschitzien.

a) Montrer que l'image et le noyau de $(u - Id_E)$ sont supplémentaires.

b) En déduire que $\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} u^i$ converge vers un endomorphisme que l'on précisera.