

Définition 1 On appelle *tribu* sur un ensemble Ω une partie \mathcal{A} de $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que : (i) $\Omega \in \mathcal{A}$
(ii) $\forall A \in \mathcal{A}, \bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ (iii) pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{A} , $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$
L'ensemble Ω est l'*univers des possibles*. Les éléments de \mathcal{A} sont les *événements mesurables*. Deux événements A et B sont dits *incompatibles* lorsque $A \cap B = \emptyset$. Un *système complet* d'événements est une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles dont la réunion est égale à Ω .

Remarque 1 Si \mathcal{A} est une tribu sur Ω , $\emptyset \in \mathcal{A}$ et $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$ pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.

Définition 2 Si \mathcal{A} est une tribu sur Ω , une *probabilité* sur (Ω, \mathcal{A}) est une application P de \mathcal{A} dans $[0, 1]$ vérifiant : $P(\Omega) = 1$ et, pour toute suite $(A_n)_{n \geq 0}$ d'événements deux à deux incompatibles, $P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ (σ -additivité). On dit alors que (Ω, \mathcal{A}, P) est un *espace probabilisé*. Un événement dont la probabilité est égale à 1 (resp.0) est dit *presque sûr* (resp. *négligeable*). On dit qu'une suite d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système *quasi-complet* lorsque ces événements sont deux à deux incompatibles et que la somme de leurs probabilités vaut 1.

Remarque 2 Probabilité de l'événement contraire et de la réunion de deux événements.

Proposition 1 Une probabilité est croissante pour l'inclusion.

Proposition 2 (*Continuité croissante*) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements telle que, pour tout n , $A_n \subset A_{n+1}$, alors $P(A_n)$ tend vers $P(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k)$ quand n tend vers l'infini.

Corollaire 1 (*Continuité décroissante*) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements telle que, pour tout n , $A_{n+1} \subset A_n$, alors $P(A_n)$ tend vers $P(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k)$ quand n tend vers l'infini.

Corollaire 2 (*Sous-additivité*)

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements quelconque, $P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.

Définition 3 Si A et B sont des événements et si $P(B) \neq 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par : $P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Remarque 3 P_B définit bien une probabilité sur (Ω, \mathcal{A}) .

Proposition 3 (*Formule des probabilités composées*) Si A_1, \dots, A_n sont des événements tels que $P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \neq 0$ alors : $P(\bigcap_{i=1}^n A_i) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$.

Proposition 4 (*Formule des probabilités totales*) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet (ou quasi) d'événements alors : $P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n)$ ($\forall B \in \mathcal{A}$).

Corollaire 3 *Formule de Bayes*

Définition 4 Des événements A_1, A_2, \dots, A_n sont dits *mutuellement indépendants* lorsque, pour toute partie I de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$.

Remarque 4 Des événements peuvent être 2 à 2 indépendants sans l'être mutuellement.

Proposition 5 Si A_1, A_2, \dots, A_n sont mutuellement indépendants alors $A_1, A_2, \dots, \bar{A}_n$ le sont aussi.

Définition 5 Si \mathcal{A} est une tribu sur un ensemble Ω , une variable aléatoire discrète sur (Ω, \mathcal{A}) est une application X sur Ω , d'image finie ou dénombrable, telle que : $\forall x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$. Si X est une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , on appelle loi de X l'application $P_X : \mathcal{P}(X(\Omega)) \rightarrow [0, 1]$, $U \mapsto P(X \in U) = P(X^{-1}(U))$.

Remarque 5 P_X est une probabilité sur $(X(\Omega))$, entièrement déterminée par $\{P(X = x)\}_{x \in X(\Omega)}$.

Lois usuelles : loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale, loi géométrique, loi de Poisson.

Définition 6 La *loi conditionnelle* de Y sachant A est donnée par $P_A(Y = y) = \frac{P((Y=y) \cap A)}{P(A)}$.

Proposition 6 Si X et Y sont deux variables aléatoires de même loi, alors $f(X)$ et $f(Y)$ aussi.

Proposition 7 Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes sur (Ω, \mathcal{A}) , alors $Z : \omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega))$ est une variable aléatoire discrète sur (Ω, \mathcal{A}) .

Définition 7 La loi du couple (X, Y) est appelée *loi conjointe*.

Elle est déterminée par $\{P((X, Y) = (x, y)) = P((X = x) \cap (Y = y)); (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)\}$.

Les lois de X et de Y sont appelées *lois marginales*.

Définition 8 Deux variables aléatoires discrètes X et Y sur (Ω, \mathcal{A}) sont dites indépendantes lorsque : $\forall A \subset X(\Omega), \forall B \subset Y(\Omega), P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$. On note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Proposition 8 $X \perp\!\!\!\perp Y \iff \forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$

Proposition 9 (*Lemme des coalitions*) Si X_1, \dots, X_n sont des v.a.d. indépendantes alors $f(X_1, \dots, X_k)$ et $g(X_{k+1}, \dots, X_n)$ sont deux v.a.d. indépendantes.

Définition 9 L'espérance d'une v.a.d. X à valeurs dans $[0, +\infty]$ est définie par :

$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x)$ (avec la convention $x P(X = x) = 0$ si $x = +\infty$ et $P(X = +\infty) = 0$)

On dit qu'une v.a.d. X à valeurs dans \mathbf{C} est d'espérance finie lorsque la famille $(x P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. $E(X)$ est alors la somme de cette famille. On dit que X est centrée lorsque $E(X) = 0$.

Remarque 6 Positivité de l'espérance pour des v.a.d. à valeurs réelles.

Remarque 7 Si X est à valeurs positives et d'espérance nulle, alors $(X = 0)$ est presque sûr.

Remarque 8 Si X est à valeurs dans \mathbf{N} , alors $E(X) = \sum_{n \geq 1} P(X \geq n)$.

Proposition 10 $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x) P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Et l'espérance de $f(X)$ est alors la somme de cette famille. (*Formule du transfert*)

Corollaire 4 Linéarité de l'espérance; croissance de l'espérance.

Corollaire 5 Si $|X| \leq Y$ et $E(Y) < +\infty$ alors X est d'espérance finie et $|E(X)| \leq E(Y)$.

Proposition 11 Si X et Y sont deux v.a.d. indépendantes d'espérances finies, alors XY aussi et $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Proposition 12 Soit X et Y sont deux v.a.d. réelles. Si X^2 et Y^2 sont d'espérances finies, alors XY aussi et $|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$ (*inégalité de Cauchy-Schwarz*).

Définition 10 Si X et Y sont deux v.a.d. réelles avec X^2 et Y^2 d'espérances finies, on définit :

i) la *variance* de X , $V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$

ii) la *covariance* de X et Y , $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

iii) l'*écart type* de X , $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ (et l'on dit que X est réduite lorsque $\sigma(X) = 1$)

Remarque 9 i) $\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2, V(aX + b) = a^2 V(X)$ ii) si $\sigma(X) > 0$ alors $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Proposition 13 $V(\sum_{k=1}^n X_k) = \sum_{k=1}^n V(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)$

Proposition 14 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Chebychev; loi faible des grands nombres.

Proposition 15 Si X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbf{N} , alors la série de terme général $P(X = n) t^n$ converge normalement sur $[-1, 1]$; et l'on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) t^n = E(t^X)$.

Définition 11 La fonction $G_X(t)$ ainsi définie est appelée *fonction génératrice* de X .

Proposition 16 Si X et Y sont indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Proposition 17 X est d'espérance finie ssi G_X est dérivable en 1, auquel cas $E(X) = G_X'(1)$.