Définition 1 Soit f une application d'un ouvert U d'un espace de dimension finie E dans $\mathbf{R}$.
On dit que f est dérivable en un point a de U suivant le vecteur v lorsque l'application $t \mapsto f(a+t\,v)$ est dérivable en 0. Cette dérivée est alors notée $D_v f(a)$.

Définition 2 Si U est un ouvert de $\mathbf{R}^p$ et $a=(x_1,\dots,x_p)\in U$, on dit que f admet en a une *dérivée partielle* selon la i-ème coordonnée lorsque f est dérivable en a selon le i-ème vecteur de la base canonique. On note alors $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ (ou $\partial_i f(a)$) la valeur de cette dérivée.
On dit enfin que f est de classe C^1 sur U lorsqu'elle admet en tout point de U des dérivées partielles selon toutes les coordonnées, et que : $\forall\, i,\ a\mapsto \partial_i f(a)$ est continue sur U.

Théorème 1 Si f est de classe C^1 sur U alors : $\forall a\in U,\ f(a+h)=f(a)+\sum_{i=1}^p h_i\,\partial_i f(a)+o(\|h\|)$

Définition 3 L'application $\mathrm{d}f(a)\colon h\mapsto \sum_{i=1}^p h_i\,\partial_i f(a)$ est appelée *différentielle* de f en a.

Remarque 1 Il s'agit d'une forme linéaire sur $\mathbf{R}^p$, représentée (pour le produit scalaire canonique) par le *gradient* de f en a, $\nabla f(a)=\big(\partial_1 f(a),\dots,\partial_p f(a)\big)$.

Remarque 2 Si f est de classe C^1 sur U, alors f est continue sur U.

Remarque 3 Combinaisons linéaires, produit, composition d'applications de classe C^1.

Proposition 1 Si $g: I\to E$ est dérivable en t, et si f est de classe C^1 sur un ouvert contenant $g(I)$, alors $f\circ g$ est dérivable en t et $(f\circ g)'(t)=\mathrm{d}f\big(g(t)\big)\big(g'(t)\big)=\sum_{i=1}^p g_i'(t)\,\partial_i f(g(t))$.

Corollaire 1 Calcul des dérivées partielles de $(u_1,\dots,u_n)\mapsto f\big(x_1(u_1,\dots,u_n),\dots,x_p(u_1,\dots,u_n)\big)$.

Remarque 4 Cas des coordonnées polaires.

Corollaire 2 Si f est de classe C^1 sur un ouvert convexe U, f est constante sur U si, et seulement si, sa différentielle est identiquement nulle.

Définition 4 Soit f une application de classe C^1 sur un ouvert U. Un point a est dit *régulier* lorsque le gradient de f en a n'est pas nul. Dans le cas contraire, le point a est dit *critique*.

Proposition 2 Si une application (scalaire) de classe C^1 sur un ouvert présente un extremum local en un point, c'est un point critique.

Définition 5 Si f est de classe C^1 sur un ouvert U, on définit les dérivées partielles d'ordre 2, quand elles existent, par $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)$.
Lorsqu'elles existent toutes et sont toutes continues sur U, on dit que f est de classe C^2.

Théorème 2 *(Hermann Amandus SCHWARZ)* Si f est de classe C^2 alors : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$.

Théorème 3 Si f est de classe C^2 alors $f(a+h)=f(a)+(\nabla f(a)^\top h+\frac{1}{2}h^\top H_f(a)\,h+o\big(\|h\|^2\big)$
où $H_f(a)$ est la *Hessienne* de f en a, matrice (symétrique) définie par : $\big[H_f(a)\big]_{i,j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)$.

Proposition 3 Si f est de classe C^2 sur U et a un point critique, alors :

- si f présente un minimum local en a, $H_f(a)\in\mathscr{S}_p^+(\mathbf{R})$
- si $H_f(a)\in\mathscr{S}_p^{++}(\mathbf{R})$, f présente un minimum local strict en a

Définition 6 Tangente en un point régulier d'une courbe d'équation $f(x,y)=0$.

Définition 7 Plan tangent en un point régulier d'une surface d'équation $f(x,y,z)=0$.

Remarque 5 La tangente en un point régulier d'une courbe de classe C^1 tracée sur une surface d'équation $F(x,y,z)=0$ appartient au plan tangent à la surface en ce point.