Exercice 1 *(Mines-Ponts 2019)* La fonction définie par $f(x,y)=\frac{x^3y}{x^2+y^4}$ pour $(x,y)\neq(0,0)$ peut-elle être prolongée en une fonction de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$?

Exercice 2 *(CCINP 2023)* On pose $f(0,0)=0$ et $f(x,y)=xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ pour $(x,y)\neq(0,0)$.

a) Étudier la continuité de f sur $\mathbf{R}^2$.

b) Calculer les dérivées partielles premières de f. Est-elle de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$?

c) Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$. Conclusion ?

Exercice 3 *(Mines-Télécom 23)* On pose $g(0,0)=0$ et $g(x,y)=xy\ln\left(x^2+y^2\right)$ pour $(x,y)\neq(0,0)$.

a) Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$.

b) Justifier l'existence d'extremums locaux pour g sur $D=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;\ x^2+y^2\leqslant 1\right\}$.

c) Déterminer les extremums, locaux ou globaux, de g sur D.

Exercice 4 *(Centrale 2021)* On pose $f(0,0)=0$ et $f(x,y)=\frac{xy}{(x+1)(y+1)(x+y)}$ pour $(x,y)\in\mathbf{R}_+^2$.
Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}_+^2$ et y possède un maximum, que l'on déterminera.

Exercice 5 *(Mines-Ponts 2016)* Soit $A\in\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ définie positive et $B\in\mathbf{R}^n$.
Pour $X\in\mathbf{R}^n$ on pose $f(X)=X^TAX-2B^TX$. a) Calculer le gradient de f.
b) Montrer que f possède un minimum et déterminer sa valeur.

Exercice 6 *(Mines-Télécom 2018)* Soit $(E): 1+x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-f(x,y)=0$.

a) Montrer que $h:(x,y)\mapsto 1+\sqrt{x^2+y^2}$ est solution de (E).

b) On pose $g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$. Montrer que résoudre (E) revient à résoudre $1+r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)-g(r,\theta)=0$ puis achever la résolution de (E).

Exercice 7 *(Centrale 2021)* Soit (E) : $f(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
On cherche les applications f de classe C^2 de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, ne s'annulant pas sur $\mathbf{R}^2$, vérifiant (E).

a) Montrer que, nécessairement, il existe a de classe C^1 de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=a(x)f(x,y)$.

b) Montrer que f est solution si et seulement si elle s'écrit $f(x,y)=g(x)h(y)$ avec g et h de classe C^2 de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, ne s'annulant pas.

Exercice 8 *(Centrale 2021)* Soit g de classe C^1 de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ et $S(g)=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3; z=g(x,y)\}$.

a) Montrer que tous les points de $S(g)$ sont réguliers.

b) On s'intéresse aux applications g vérifiant (E) : $2\partial_1 g(x,y)+\partial_2 g(x,y)=0$.
   i) Que signifie cette propriété pour la surface $S(g)$?
   ii) Montrer que l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ défini par $u(x,y)=(x-2y,y)$ est inversible.
   iii) Si h est une application de classe C^1 de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, on pose $f=h\circ u^{-1}$. Calculer les dérivées partielles de f. En déduire les solutions de (E).

Exercice 9 *(Centrale 2021)* Soit $f(x,y)=(2x^2+3y^2)\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

a) Avec Python, tracer la surface représentative de f sur $[-2,2]\times[-2,2]$.

b) Montrer que f admet un minimum, que l'on précisera, sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$.

c) Soit $a>0$. Montrer qu'il existe $R_a>0$ tel que : $x^2+y^2>R_a \implies f(x,y)\leqslant a$.

d) Montrer que f admet un maximum M sur $\mathbf{R}^2$ et calculer M.

e) Pour $c\in[0,M]$, soit $\Gamma_c=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2,\ f(x,y)=c\}$. Tracer Γ_c pour $c\in\{0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.75,0.8,0.9\}$.