Exercice 1 *(Centrale 2013)* Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ on pose $N(M) = \max|M_{i,j}|$.

a) Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que : $N(AB) \leqslant cN(A)N(B)\ \ \forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

b) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{A^k}{k!}$ est convergente. On note $\exp(A)$ la somme de cette série.

c) Calculer $\exp(A)$ pour $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$.

d) On admet que si A et B commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.
En déduire que l'exponentielle est à valeurs dans $GL_n(\mathbf{R})$.
Est-elle surjective de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dans $GL_n(\mathbf{R})$? Est-elle injective ?

Exercice 2 *(Mines-Ponts 2013)*
Déterminer les matrices $A \in GL_n(\mathbf{C})$ telles que $(A^n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(A^{-n})_{n\in\mathbf{N}}$ soient bornées.

Exercice 3 *(Centrale 2009)* Soit $(F_1,\dots,F_p)$ une famille de sous-espaces d'un espace vectoriel normé $\big(E,\|\cdot\|\big)$ de dimension finie, d'intersection réduite au vecteur nul
Montrer que l'on définit une norme sur E en posant : $N(x) = \sum_{i=1}^{p} d(x,F_i)$.

Exercice 4 Soit n un entier naturel impair et $A(t)$ une fonction dérivable sur un intervalle I, à valeurs dans $O_n(\mathbf{R})$. Montrer que : $\forall t \in I,\ \det(A'(t)) = 0$.

Exercice 5 Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans un espace vectoriel E de dimension finie.
On suppose que f est dérivable en 0 et que : $\forall t \in \mathbf{R},\ f(2t) = 2f(t)$. Montrer que f est linéaire.

Exercice 6 Soit f une application dérivable d'un segment $[a,b]$ dans $\mathbf{R}^2$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c)$ soit colinéaire à $f(b)-f(a)$.