Exercice 1 *(Mines-Ponts 23)* Soit (X_i) une suite de vaiid de loi uniforme sur $[\![1,r]\!]$.
Pour $n \in \mathbf{N}$, soit A_n l'événement "on retrouve n fois chaque entier de $[\![1,r]\!]$ dans le nr-uplet $(X_1,\dots,X_{nr})$".
Déterminer la probabilité de A_n puis la probabilité qu'une infinité de A_n se réalise.

Exercice 2 *(Mines-Ponts 23)* Soit X une vad suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

a) Montrer que $P(X \leqslant n) = \frac{1}{n!}\int_{\lambda}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

b) En déduire un équivalent de $\int_{\lambda}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ quand n tend vers $+\infty$.

c) Déterminer la probabilité que X soit paire.

d) Soit Y suivant une loi uniforme dans $\{1,2\}$. On suppose X et Y indépendantes.
Déterminer alors la probabilité que XY soit paire.

Exercice 3 *(Mines-Télécom 23)* Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^*$.
On suppose que : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ P(X \geqslant n) \neq 0$. On pose alors $x_n = P_{(X\geqslant n)}(X=n)$.

a) Montrer que $x_n = \frac{P(X=n)}{P(X\geqslant n)}$, puis que $1 - x_n = \frac{P(X\geqslant n+1)}{P(X\geqslant n)}$.

b) Montrer que $x_n \in [0,1[$, puis que $\prod_{k=1}^{n}(1-x_k) = P(X \geqslant n)$.

c) Montrer que la série de terme général x_n est divergente.

d) Montrer que $X \sim \mathscr{G}(p)$ si, et seulement si, la suite (x_n) est constante égale à p.

Exercice 4 *(Mines-Télécom 23)* Un mobile initialement placé en l'origine se déplace sur l'axe des abscisses avec la probabilité p d'avancer d'une unité et la probabilité $q = 1-p$ de reculer d'une unité. On note X_n la variable aléatoire associée à la position du mobile après n déplacements.

a) Soit D_n le nombre de déplacements vers la droite effectués lors des n premiers déplacements, quelle relation y a-t-il entre X_n et D_n ?

b) Déterminer la loi de D_n, puis celle de X_n.

c) Déterminer l'espérance puis la variance de X_n.

Exercice 5 *(CCINP 23)*
Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et X à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ telle que $P(X=k) = \frac{a}{k+1}\binom{n}{k}$ pour un certain $a \in \mathbf{R}$.

a) Exprimer $\binom{n}{k}$ en fonction de $\binom{n-1}{k-1}$.

b) Déterminez a pour qu'il s'agisse bien d'une loi de probabilité.

c) Calculer $E(X)$ puis $V(X)$.

Exercice 6 *(CCINP 23)*
On dispose d'une urne qui contient 3 jetons numérotés 1,2,3, dans laquelle on effectue des tirages avec remise. Soit Y la variable aléatoire correspondant au numéro du tirage où l'on obtient pour la première fois un chiffre différent du premier chiffre obtenu ; et Z la variable aléatoire correspondant au numéro du tirage l'on obtient pour la première un troisième chiffre.

a) Déterminer la loi de Y. Quelle est la loi de $Y-1$? En déduire l'espérance et la variance de Y.

b) Déterminer la loi de (Y,Z). En déduire la loi de Z.

Exercice 7 *(Centrale 19)* Soit X et Y deux variables aléatoires à valeur dans $\mathbf{N}$, telles que :
$P(X=i, Y=j) = \frac{c\,\mathrm{e}^{-i}}{j^2+3j+2}$. Déterminer la constante c, puis la loi de X, son espérance et sa variance.
Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 8 *(CCINP 23)* Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p. Soit N une variable aléatoire telle que $N+1$ suive la loi géométrique de paramètre p. On pose $Y=\sum_{n=1}^{N} X_n$, avec la convention : $\sum_{n=1}^{0} X_n = 0$.

a) Soit $n\in\mathbf{N}^*$. Donner la loi de $S_n = X_1+\cdots+X_n$.

b) Soit $x\in]-1,1[$. Calculer, pour $k\in\mathbf{N}^*$, $\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n-k}$.

c) Calculer $P(Y=k)$ et reconnaitre la loi de $Y+1$.

Exercice 9 *(Centrale 23)* Soit a et b deux entiers naturels non nuls et N leur somme.
Une urne contient initialement a boules vertes et b boules rouges. On effectue une suite de tirages selon le protocole suivant : si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne ; si elle est verte, elle est remplacée par une boule rouge prise dans une réserve annexe.
On définit deux variables aléatoires : T_k vaut 1 si l'on pioche une boule verte au k-ième tirage et 0 sinon ; X_k est le nombre de boules vertes piochées lors des k premiers tirages.

1) Déterminer la loi de T_1 et celle de T_2.

2) Montrer que $P(T_{n+1}=1)=\frac{a-E(X_n)}{N}$. En déduire que $P(T_n=1)=a\frac{(N-1)^{n-1}}{N^n}$.

3) Calculer $E(X_n)$ puis déterminer sa limite quand n tend vers l'infini.

Exercice 10 *(Mines-Ponts 23)* Pour $x>1$ on pose $\zeta(s)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^s}$.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ telle que : $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ P(X=n)=\frac{1}{\zeta(s)n^s}$.

a) Pour $n\in\mathbf{N}^*$, déterminer la probabilité que X soit divisible par n.

b) Pour p premier et $n\in\mathbf{N}^*$, on note $V_p(n)=\max\{k\in\mathbf{N},\ p^k \text{divise} n\}$.
Déterminer la loi de $V_p(X)$ puis calculer son espérance.

Exercice 11 *(Mines-Télécom 23)* Soit $n\in\mathbf{N}^*$ et X suivant une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{n}$.
Montrer que : (i) $P\left(X\geqslant n^2\right)\leqslant\frac{1}{n}$ (ii) $P(|X-n|\geqslant n)\leqslant 1-\frac{1}{n}$ (iii) $P(X\geqslant 2n)\leqslant 1-\frac{1}{n}$

Exercice 12 *(CCINP 19)* Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires 2 à 2 indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. Pour $n\in\mathbf{N}^*$, on pose $Y_n=X_n+X_{n+1}$ et $M_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Y_k$.

a) Les variables Y_n sont-elles deux à deux indépendantes ?

b) Déterminer $E(M_n)$ et $V(M_n)$ puis montrer que : $\forall\varepsilon>0,\ \lim_{n\to+\infty}P\left(|M_n-2p|\geqslant\varepsilon\right)=0$.

Exercice 13 *(CCINP 23)* Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

a) Retrouver la fonction génératrice $G_X(t)$ puis montrer que : $\forall t\geqslant 1,\ P(X\geqslant 2\lambda)\leqslant\frac{G_X(t)}{t^{2\lambda}}$.

b) En déduire que $P(X\geqslant 2\lambda)\leqslant\left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^{\lambda}$. Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 14 *(Mines-Télécom 23)* On réalise une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes, de même paramètre. Pour $m\in\mathbf{N}^*$, soit S_m le nombre d'épreuves réalisées pour obtenir m succès.

a) Déterminer la loi suivie par S_1 et donner sa fonction génératrice.

b) Montrer que S_m-S_{m-1} suit la même loi que S_1.

c) Déterminer la fonction génératrice de S_m puis donner son espérance.

Exercice 15 *(Centrale 23)* On dit qu'une vad X est décomposable lorsqu'il existe deux variables aléatoires indépendantes X et Y, non presque sûrement constantes, telles que $X\sim Y+Z$.

a) Quelle relation a-t-on alors entre G_X, G_Y et G_Z ?

b) On suppose que $X\sim\mathscr{B}(n,p)$. Montrer que X est décomposable si, et seulement si, $n\geqslant 2$.