Exercice 1 *(Centrale 2022)* Soit $\varphi : (x, y) \mapsto (xy, x + y)$ et $V = \{(x, y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2,\ y > x > 0\}$.

a) Montrer que V est un ouvert et que $\varphi(V) = \{(p, s) \in \mathbf{R}_+^*,\ s^2 > 4p\}$. Justifier la classe C^1 de φ.
On admet que φ réalise une bijection de V sur $\varphi(V)$ et que sa réciproque est de classe C^1.

b) Soit f de classe C^1 vérifiant sur V l'équation (E): $x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 - y^2$.
Montrer que $g = f \circ \varphi^{-1}$ vérifie sur $\varphi(V)$ l'équation $\frac{\partial g}{\partial s}(p, s) = s$.

c) En déduire qu'une fonction f de classe C^1 est solution de (E) sur V si, et seulement si, il existe une fonction $K\colon \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ de classe C^1 telle que $f(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)^2 + K(xy)$.

Exercice 2 *(Centrale 2022)*
Soit $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, (x, y, z) \mapsto \sin(x)\sin(y)\sin(z)$ et g sa restriction à $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}_+^3 \ :\ x + y + z = \frac{\pi}{2}\}$.

a) Justifier l'existence d'un maximum de g sur D.

b) En paramétrant D par (x, y), déterminer les points de D en lesquels g atteint ce maximum M.

c) Soit (a, b, c) un tel point et $V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, f(x, y, z) = M\}$.
Montrer que D est inclus dans le plan tangent à V en (a, b, c).

Exercice 3 *(Mines-Ponts 2022)*
Résoudre $x(x-1)\dfrac{\partial f}{\partial x} + y(x-1)\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 f(x, y)$ en posant $x = u$ et $y = uv$.

Exercice 4 *(Mines-Ponts 2022)* Déterminer les extrema de $(x^2 - 4y^2)(x^2 - 4y^2 - 8)$ sur $\mathbf{R}^2$.

Exercice 5 *(TPE-IVP 2019)* Déterminer les extrema de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$ sur $\mathbf{R}^2$.

Exercice 6 *(Centrale 2019)* Soit u une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, de classe C^1 et croissante.

a) Montrer que : $\forall t \geqslant 0,\ \forall x \in \mathbf{R},\ \exists!\ a(t, x) \in \mathbf{R}$ tq $x = a(t, x) + t\,u(a(t, x))$.

b) On admet que la fonction $(t, x) \mapsto a(t, x)$ est continue sur $[0, +\infty[\times\mathbf{R}$ et C^1 sur $]0, +\infty[\times\mathbf{R}$.
Montrer que $f : (t, x) \in]0, +\infty[\times\mathbf{R} \mapsto u(a(t, x))$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[\times\mathbf{R}$ et vérifie :
$\forall (t, x) \in]0, +\infty[,\ \partial_1 f(t, x) + f(t, x)\,\partial_2 f(t, x) = 0$.

Exercice 7 *(Mines-Ponts 2017)* À l'aide d'un changement de variable linéaire, trouver toutes les applications de classe C^2 de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant : $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y} + 3\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0$.