Exercice 1 *(CCINP 2019)* Déterminer les points critiques de $f(x,y) = x^3y^2(x+y-1)$
puis étudier le comportement de f au voisinage de ces points.

Exercice 2 *(CCINP 2019)* Soit f définie par : $f(x,y) = x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right)$ pour $x \neq 0$; et $f(0,y) = 0$.

a) Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}^2$.

b) Calculer les premières dérivées partielles de f puis montrer qu'elles sont continues en $(0,0)$.

c) Déterminer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ en l'origine. Conclusion?

Exercice 3 *(Mines-Ponts 2016)* Soit $U = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $p \in \mathbf{R}$.
Trouver f de classe C^2 de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ telle que g définie sur U par $g(x,y) = f(x^2+y^2)$ vérifie :
$\forall (x,y) \in U,\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = (x^2+y^2)^p$.

Exercice 4 *(Mines-Ponts 2021)* Soit deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivant des lois géométriques de paramètres p_1 et p_2.

a) Déterminer la probabilité pour que la matrice $\left(\begin{smallmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{smallmatrix}\right)$ soit diagonalisable.

b) Soit Z une troisième variable aléatoire, suivant une loi de Bernoulli de paramètre q. Ces trois variables aléatoires étant supposées mutuellement indépendantes, déterminer la probabilité pour que la matrice $\left(\begin{smallmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{smallmatrix}\right)$ soit diagonalisable.

Exercice 5 *(CCINP 21)* On lance indéfiniment une pièce avec la probabilité p d'obtenir Pile.
Soit X la variable aléatoire correspondant au rang du premier Pile et Y la variable aléatoire correspondant au rang de la première apparition de la séquence Pile-Face.
Déterminer la loi conjointe de (X,Y). En déduire la loi de Y, puis calculer son espérance.

Exercice 6 *(CCINP 22)* Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$ vérifiant :
$P(X=k, Y=n) = \binom{n}{k} p(1-p)^n/2^n$ pour $k \leqslant n$ et 0 sinon.

a) Calculer $P(Y=n)$.

b) Donner le développement en série entière de $\frac{1}{1-x}$; en déduire : $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$ $(\forall k \in \mathbf{N})$.

c) Calculer $P(X=k)$. X et Y sont-elles indépendantes?