Exercice 1 *(CCINP 21)* Soit $p \in]0,1[$. Pour $k \in \mathbf{N}^*$ on pose $p_k = p^2 k(1-p)^{k-1}$.

a) Montrer qu'il est plausible de considérer une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ telle que : $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ P(X=k) = p_k$.

b) Justifier l'existence et déterminer la valeur de $E(X-1)$ puis de $E\big((X-1)(X-2)\big)$.

c) En déduire l'existence et la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.

Exercice 2 *(CCINP 21)* Soit X et Y deux v.a.i.i.d. à valeurs dans $\mathbf{N}$, de variance finie, telles que $Z = X+Y+1$ suive une loi géométrique de paramètre p.

a) Déterminer l'espérance et la variance de X en fonction de p.

b) Déterminer la fonction génératrice de X. En déduire la loi de X.

Exercice 3 *(Centrale 21)*
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p.
On considère $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$ et l'on note I et S les valeurs propres de M, avec $I \leqslant S$.

a) Déterminer les expressions de I et S en fonction de X et Y.

b) Quelle est la probabilité que la matrice M soit inversible ?

c) Calculer la covariance de I et S. Ces variables sont-elles indépendantes ?

d) Montrer que, pour tout $k \geqslant 2$, $P(S=k) = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}$.

Exercice 4 *(Mines-Ponts 2021)*
Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p.

a) Déterminer la loi de $Y = \min(X_1, \dots, X_n)$. Montrer que Y admet une espérance et la déterminer.

b) Déterminer la loi de $Z = \max(X_1, \dots, X_n)$. Montrer que Z admet une espérance et la déterminer.

Exercice 5 *(Mines-Ponts 2021)* Soit X et Y deux variables aléatoire discrètes indépendantes, de même loi, à valeurs réelles ; et f et g deux applications croissantes de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

a) Montrer que la variable aléatoire $\big(f(X)-f(Y)\big)\big(g(X)-g(Y)\big)$ est à valeurs positives.

b) En déduire que la covariance de $f(X)$ et $g(X)$ est positive ou nulle.

c) Soit (a_n) et (b_n) deux suites croissantes de réels. Montrer que : $\sum_{i=1}^n a_i b_i \geqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)$.

Exercice 6 *(Mines-Ponts 2019)* Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $]0,+\infty[$, indépendantes et de même loi. On pose $Y_1 = \frac{X_1}{X_1+X_2}$ et $Y_2 = \frac{X_2}{X_1+X_2}$.

a) Démontrer que Y_1 admet une espérance finie et calculer $\mathrm{E}(Y_1)$.

b) Démontrer que Y_1 admet une variance finie, puis montrer que $\mathrm{cov}(Y_1, Y_2) = -\mathrm{V}(Y_1)$.