1 Centrale 1

1.1 *(Jade Ben Maamar)*

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & c & b \\ -c & 0 & a \\ -b & -a & 0 \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$.

1) Trouver $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $A^3 = -\alpha A$.

2) Déterminer les puissances de A en fonction de α et A.

3) Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^n}{n!}$. Montrer que S_n converge vers une matrice de rotation.

1.2 *(Romain Bloch)*

1) Montrer que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est de rang 1 ssi il existe Y et X dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ non nulles tels que $A = XY^\top$.

2) Soit A définie par $A_{i,j} = \sin(i+j)$. Déterminer le rang de A puis montrer qu'il existe C_1, C_2, D_1 et D_2 dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ telles que $A = (C_1, C_2)(D_1, D_2)^\top$.

3) Généraliser ce résultat aux matrices de rang 2.

1.3 *(Prisha Chandiramani)*

Sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on définit $f\colon x \mapsto \frac{\sin(x)+1}{\cos(x)}$.

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$
avec P_n un polynôme unitaire de degré n à coefficients dans $\mathbf{N}$.

2) Montrer que la série de Taylor de f est absolument convergente sur I.

3) Montrer que f coïncide avec sa série de Taylor sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

1.4 *(Marie-Sixtine Coville)*

Soit a et b deux entiers naturels non nuls et N leur somme. Une urne contient initialement a boules vertes et b boules rouges. On effectue une suite de tirages selon le protocole suivant :
- si la boule sortie est rouge, on la remet dans l'urne ;
- si elle est verte, elle est remplacée par une boule rouge prise dans une réserve annexe.
On définit deux variables aléatoires : T_k vaut 1 si l'on pioche une boule verte au k-ième tirage et 0 sinon ; X_k est le nombre de boules vertes piochées lors des k premiers tirages.

1) Déterminer la loi de T_1 et celle de T_2.

2) Montrer que $P(T_{n+1} = 1) = \frac{a - E(X_n)}{N}$. En déduire que $P(T_n = 1) = a\frac{(N-1)^{n-1}}{N^n}$.

3) Calculer $E(X_n)$ puis déterminer sa limite quand n tend vers l'infini.

1.5 *(Christophe El Yammouni)*

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $E = \mathbf{R}_n[X]$. Pour $P \in E$ on pose $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

1) Montrer que Δ est définit un endomorphisme de E.

2) Existe-t-il un endomorphisme u de E tel que $u^2 = \Delta$?

3) Quels sont les sous-espaces de E stables par Δ ?

1.6 *(Mathieu Huon)*

1) Établir la convergence de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.
2) On pose $a_1 = -1$ et, pour $n \geqslant 2$, $a_n = -\frac{1}{n} - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.
   Déterminer les rayons de convergence de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$ et de $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.
3) Trouver une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$. En déduire un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 1^-$.

1.7 *(Noémie Neil)*

Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on pose $f_n(x) = (\cos x)^n$.

1) Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de terme général f_n.
2) Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la série de terme général f_n.
3) Convergence et calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{\pi/2} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

1.8 *(Antoine Rakotomanga)*

Dans $\mathbf{R}[X]$ on pose $< P, Q >= \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(1) Q^{(k)}(1)$.

1) Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.
2) Montrer que la famille $((X-1)^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbf{R}[X]$.
3) Déterminer l'orthogonal de $\mathbf{R}_n[X]$.

2 Centrale 2

2.1 *(Romain Bloch)*

On note $S(n,k)$ le nombre de surjections de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,k]\!]$.
On admet la relation $S(n,k) = k\,S(n-1,k) + k\,S(n-1,k-1)$.

1) Que vaut $S(n,k)$ si $n < k$? Que valent $S(n,1)$ et $S(n,n)$?
2) Avec Python, définir $S(n,k)$ pour $k \in [\![1,5]\!]$ et $n \in [\![1,20]\!]$.
3) Pour $k \in [\![1,5]\!]$, tracer $\ln(S(n,k))$ en fonction de n. Conjecture ?
4) Tracer $x \mapsto \sum_{n=1}^{20} S(n,k) x^n$ pour $x \in]-1,1[$. Conjecture ?
5) Montrer que le rayon de convergence R_k de $\sum_{n=1}^{+\infty} S(n,k)\, x^n$ est non nul.
   Montrer que la suite (R_k) est décroissante.
6) Pour $x \in]-R_k, R_k[$ montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} S(n,k)\, x^n = \frac{k!\,x^k}{\prod_{j=1}^{k}(1-jx)}$.

Il restait deux autres questions…

2.2 *(Prisha Chandiramani)*

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On répartit n boules entre deux urnes U_1 et U_2.
On tire de manière équiprobable un nombre dans $\{1, 2, \ldots, n\}$. Si ce nombre est inférieur ou égal au nombre de boules dans U_1, on prend une boule de U_1 pour la mettre en U_2 ; dans le cas contraire on prend une boule de U_2 pour la mettre en U_1. Soit Z_p le nombre de boules dans U_1 à la p-ième étape.

1) Soit $Y_p = [P(Z_p = 0), P(Z_p = 1), \ldots, P(Z_p = n)]^\top$. Trouver $A \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbf{R})$ telle que $Y_{p+1} = AY_p$.

2) Coder une fonction qui renvoie le nombre de boules dans U_1 à la p-ième étape lorsque $Z_0 = 0$.
3) Montrer que 1 est valeur propre de A.
4) Soit f l'endomorphisme représenté par A dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$.
   Trouver l'expression de $f(P)$ en fonction de P', XP et X^2P'.
5) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de A. Est-elle diagonalisable ?

2.3 *(Marie-Sixtine Coville)*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs.
On lui associe la suite définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = a_1$ et $u_n = a_n\,u_{n-1} + u_{n-2}$ pour $n \geqslant 2$.

1) Écrire une fonction des p premières valeurs de (a_n) qui retourne les p premières valeurs de (u_n).
2) Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{u_k\,u_{k-1}}$.
   Écrire une fonction des p premières valeurs de (a_n) qui retourne les p premières valeurs de S_n.
3) Tracer la ligne brisée reliant les points (n, S_n) pour n prenant les valeurs de 1 à 20 lorsque la suite (a_n) est respectivement donnée par :
   (i) $a_n = 1/2^n$ (ii) $a_n = 1/n^2$ (iii) $a_n = 1/\sqrt{n}$ (iv) $a_n = 1$.
   Faire une conjecture sur le comportement de la série de terme général $\frac{(-1)^k}{u_k\,u_{k-1}}$.
4) On suppose que la série de terme général a_n converge. Montrer que $u_n \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$.
   En déduire la divergence de la série de terme général $\frac{(-1)^k}{u_k\,u_{k-1}}$?
5) Établir la réciproque de cette implication.

2.4 *(Christophe El Yammouni)*

Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on pose $u_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}$ et $v_{n+1} = \frac{1}{2n+1} - v_n$ avec $v_0 = \frac{\pi}{4}$.

1) a) Coder une fonction qui renvoie une liste contenant les $n+1$ premiers termes de (u_n).
   b) Faire de même pour (v_n).
   c) Comparer les deux résultats. Émettre une conjecture puis la démontrer.
2) On pose $w_n = v_{2n}$.
   a) Exprimer w_n en fonction d'une somme partielle de la série de terme général $\frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$.
   b) En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$.
3) a) Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série de terme général $\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$.
   b) Même question pour la série de terme général $\frac{x^{4n+3}}{4n+3}$.
   c) Calculer la somme de la série de terme général $\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(4n+3)}$.
   d) Peut-on déterminer numériquement la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$?

2.5 *(François Fèvre)*

L'espace $\mathbf{R}[X]$ est muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer qu'il existe une famille orthonormée de polynômes (P_k) telle que $\deg(P_k) = k$.
2) Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, P_k est orthogonal à $\mathbf{R}_{k-1}[X]$.

3) Avec Python déterminer P_0, P_1, P_2 et P_3.
4) Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\int_0^1 P_k(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
   En déduire que P_k admet une racine comprise entre 0 et 1.

Il y avait d'autres questions...

2.6 *(Mathieu Huon)*

Pour $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$ on pose $C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$

et $J = C(0, 1, 0, \dots, 0)$.

1) Écrire une fonction d'argument $n \in \mathbf{N}^*$ qui renvoie J^k pour $2 \leqslant k \leqslant n$.
   Tester la fonction pour $n = 5$. Commenter le résultat puis le justifier pour n quelconque.
2) Écrire une fonction d'argument une liste de réels L qui renvoie $C(L)$. Tester $C([2, 3, 4, 5])$ puis donner ses valeurs propres et les comparer avec $2 + 3\mathrm{i}^k + 4(-1)^k + 5(-\mathrm{i})^k$ pour $0 \leqslant k \leqslant 3$.
3) Montrer que $C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.
   En déduire une justification de la question 2, puis la valeur de $\det(C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}))$.

2.7 *(Antoine Rakotomanga)*

On pose $u_0 = 1$ puis $u_{n+1} = 5u_n + 2\sqrt{u_n u_{n+1}}$ *(bizarre...)*

1) Avec Python calculer les 30 premiers termes de la suite. Que peut-on conjecturer ?
2) Afficher $4^n / u_n$ pour n compris entre 1 et 30 puis la valeur de $4\left(\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t\right)^2$. Conjecture ?
3) Prouver la première conjecture.
4) Soit $f(t) = t^4/(4t^2 + 1)$.
   Montrer que f réalise une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur $\mathbf{R}_+$ et donner sa bijection réciproque.
5) Soit $A \geqslant 1$. Montrer que $\int_A^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{1+At}}\,\mathrm{d}t$.
6) Montrer l'existence puis calculer la limite quand A tend vers l'infini de $\sqrt{A}\int_A^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t$.
7) Prouver la conjecture formulée dans la deuxième question.
   On donnait $\int_{u_n}^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t = \int_{u_{n+1}}^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t$???

3 Mines-Ponts

3.1 *(Raphaël Azancot)*

3.1.1

Soit (X_i) une suite de vaiid de loi uniforme sur $[\![1, r]\!]$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit A_n l'événement :
« chaque entier $k \in [\![1, r]\!]$ apparait exactement n fois parmi les nr premières valeurs prises ».

a) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer la probabilité de A_n.
b) Pour $r \geqslant 4$, calculer la probabilité de $\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{p \geq n} A_p$.

3.1.2

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues 1-périodique à valeurs dans $\mathbf{C}$.
Pour f dans E on pose : $T(f)(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$.

a) Montrer que T est un endomorphisme de E.

b) Montrer que $u_n\colon x \mapsto \exp(2^{n+1}\mathrm{i}\pi x)$ appartient à E.

c) Montrer que si m est valeur propre alors $|m| \leqslant 1$.

d) Étudier le cas $|m| < 1$. (ou $m = 1$?)

3.2 *(Romain Bloch)*

3.2.1

a) Une urne contient n boules noires et n boules blanches. On pioche sans remise des boules jusqu'à ce qu'il ne reste plus de boules de l'une des des couleurs. Déterminer la loi de X_n, variable aléatoire représentant le nombre de boules restantes dans l'urne à la fin des tirages.

b) On dispose de deux urnes contenant n boules chacune. On pioche sans remise une boule dans l'urne 1 ou dans l'urne 2, de manière équiprobable, jusqu'à ce que l'une des deux urnes soit vide. Déterminer la loi de Y_n ,variable aléatoire représentant le nombre de boules restantes dans l'urne non vidée.

c) Il y avait une troisième question...

3.2.2

Soit f deux fois dérivable de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant $f'' + (1+u)f = 0$ où u est une fonction à valeurs réelles intégrable sur $\mathbf{R}_+$. Pour tout $x \geqslant 0$ on pose $g(x) = f(x) + \int_0^x \sin(x-t) f(t) u(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Trouver une équation différentielle linéaire vérifiée par g.

b) En déduire l'existence de $c > 0$ tel que $|f(x)| \leqslant c + \int_0^x \left|f(t)u(t)\right|\mathrm{d}t$.

c) Montrer que f est bornée sur $\mathbf{R}_+$.

3.3 *(Prisha Chandiramani)*

3.3.1

Soit $S(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)\mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ et $C(x) = \int_0^{+\infty} t\cos(xt)\mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que S et C sont définies et continues sur $\mathbf{R}$.

b) Montrer que S est dérivable sur $\mathbf{R}$ et préciser $S'(x)$.

c) Montrer que $C(x) = 1 - xS(x)$. En déduire une équation différentielle vérifiée par S.

d) Montrer que $S(x) = \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}} \int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.

3.3.2

Soit (P) le plan d'équation $x - 2z - y = 0$ et u le vecteur $(1,2,1)$.

a) Donner la matrice de la projection vectorielle sur (P) de direction u.

b) Calculer l'image par cette projection de la droite (D) d'équations $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$

3.4 *(Marie-Sixtine Coville)*

3.4.1

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de vaiid telles que $P(X_n=1)=P(X_n=-1)=1/2$; et $S_n=\sum_{k=1}^n X_k$.

a) Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev montrer que $P(|S_n|/n)\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}$.

b) Montrer que $E(\exp(tS_n))=\operatorname{ch}(t)^n$

c) Montrer que $(2n)!\geqslant 2^n n!$; en déduire que $\exp(t^2/2)\geqslant\operatorname{ch}(t)$.

d) Montrer que $P(Sn/n\geqslant\varepsilon)\leqslant\exp(n\varepsilon t^2/2-n\varepsilon t)$ pour tout $t>0$.

e) En déduire que $P(Sn/n\geqslant\varepsilon)\leqslant\exp(-n\varepsilon^2/2)$.

3.4.2

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et X un vecteur propre pour $A^\top$.

a) Montrer que l'orthogonal de X est stable par A.

b) En déduire que $B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$ est diagonalisable par blocs.

3.5 *(Christophe El Yammouni)*

3.5.1

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et $B=\begin{pmatrix}0&I_n\\A&0\end{pmatrix}$.

a) Trouver une relation entre le polynôme caractéristique de B et celui de A.

b) Soit $\lambda\in\mathbf{R}$. Montrer que $\dim E_\lambda(B)=\dim E_{\lambda^2}(A)$.

c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

3.5.2

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(\sin x)^3}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

3.6 *(Héloïse Havy)*

3.6.1

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de poisson de paramètre λ.

a) Montrer que $P(X\leqslant n)=\frac{1}{n!}\int_\lambda^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

b) En déduire un équivalent de $\int_\lambda^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ quand n tend vers $+\infty$.

c) Grâce à la fonction caractéristique, donner la probabilité que X soit paire.

d) Soit Y suivant une loi uniforme dans $\{1,2\}$, indépendamment de X.
Donner la probabilité que XY soit paire.

3.6.2

Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

a) Montrer que A est diagonalisable et donner ses éléments propres.

b) Montrer que A^n tend vers une matrice L quand n tend vers l'infini.

c) Montrer que L est la matrice d'un projecteur et donner ses éléments caractéristiques.

3.7 *(Lassana Kalossi)*

3.7.1

Soit $\rho \in]0,1[$ et, pour $n \in \mathbf{N}$, $f_n(t) = \rho^n \cos(nt)$. Montrer que $1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) = \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(t)+\rho^2}$.
(il y avait d'autres questions...)

3.7.2

Soit $T\colon P \mapsto (1-X)^n P\left(\frac{X}{X-1}\right)$. Vérifier que T est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$. Est-il diagonalisable ?

3.8 *(Noémie Neil)*

3.8.1

Soit $a_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}(t^n)}\,\mathrm{d}t$.

a) Trouver un équivalent de a_n.

b) Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

c) Étudier le comportement de la somme aux extrémités de l'intervalle de convergence.

3.8.2

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie et α un réel non nul.
Déterminer les endomorphismes $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant : $\alpha u^3 = \mathrm{tr}(u^2)u$.

4 CCINP

4.1 *(Éléane Penon et Zina Camart)*

4.1.1

Soit $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t$.

1) Montrer que la suite (a_n) converge et déterminer sa limite.

2) Montrer la convergence de la série de terme général $(-1)^n a_n$.

3) Soit R le rayon de convergence de la série de terme général $a_n x^n$ et f sa somme.

   a) Montrer $a_n \geqslant \frac{1}{2n+1}$.

   b) Déterminer la valeur de R.

c) Montrer que $(2n+3)a_{n+1} = 1 + (n+1)a_n$.

d) Trouver une équation différentielle satisfaite par f.

4.1.2

Soit A une matrice carrée non nulle de taille n, à coefficients réels, vérifiant : $A^3 + 9A = 0$.

1) Montrer que le spectre de A est inclus dans $\{0, 3\mathrm{i}, -3\mathrm{i}\}$.

2) A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$? dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$?

3) Montrer que si n est impair alors A n'est pas inversible.

4) Montrer que A ne peut pas être une matrice symétrique.

4.2 *(Romain Bloch)*

4.2.1

Soit (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k}$.

a) Montrer que $0 \leqslant u_n \leqslant 4^{n+1}\, n!$ pour tout n.

b) On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n x^n}{n!}$. Montrer que f est solution de l'équation $y' = y^2$ sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$.

c) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

4.2.2

On considère trois suites définies par u_0 , v_0 , w_0 et les relations de récurrence :
$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n - w_n$, $v_{n+1} = u_n + v_n + w_n$ et $w_{n+1} = 2u_n + w_n$. On pose $X_n = (u_n, v_n, w_n)^\top$.

a) Trouver A telle que $X_{n+1} = AX_n$.

b) Triangulariser A puis résoudre la récurrence.

4.3 *(Prisha Chandiramani)*

4.3.1

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$.

1) Montrer que f est une rotation ssi a, b et c vérifient 3 équations à déterminer.

2) Montrer que f est une rotation ssi a, b et c sont racines de $X^3 - X^2 + p = 0$ avec $p \in [0, 4/27]$.

3) Si $b = c \neq 0$ déterminer l'axe de direction de la rotation et la valeur de l'angle.

4.3.2

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^x \,\mathrm{d}t$ et $g(x) = \int_{x-1}^{x} \ln(f(t))\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que f est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

2) Pour $x \geqslant 1$ déterminer une relation entre $f(x)$ et $f(x-1)$.

3) Établir la convergence de $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{g(n)}$.

4.4 *(François Fevre)*

4.4.1

Pour $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $u_n(x) = \frac{\ln(1+x^2n^2)}{n^2\ln(1+n)}$.

a) Montrer que la série de terme général $u_n(x)$ converge pour tout $x \in \mathbf{R}$.

b) Montrer que la somme de la série est continue sur $\mathbf{R}$.

c) La série des dérivées converge-t-elle normalement sur $\mathbf{R}$?

d) Montrer que la série des dérivées converge uniformément sur $\mathbf{R}$.

4.4.2

Soit $A = \begin{pmatrix} 19 & -19 & 1 \\ 9 & -9 & 1 \\ 9 & -10 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les éléments propres de A. La matrice A est elle diagonalisable ?

b) Déterminer une matrice de passage P telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.5 *(Héloïse Havy)*

4.5.1

Soit A une matrice symétrique réelle.

a) Justifier l'existence d'un vecteur propre pour A.

b) Soit X un tel vecteur, on pose $B = \begin{pmatrix} A & XX^T \\ XX^T & A \end{pmatrix}$ et $Y_a = \begin{pmatrix} X \\ aX \end{pmatrix}$.
Pour quelle valeurs de a le vecteur X_a est-il propre pour B ?

c) B est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une base de vecteurs propres.

d) Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ trouver un polynôme annulateur de B de degré 3.

4.5.2

Montrer que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3+x^2}$ définit une fonction de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

4.6 *(Mathieu Huon)*

4.6.1

Justifier l'existence de $I = \int_0^1 \frac{t(\ln t)^2}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t$ puis montrer que $I = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

4.6.2

Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

1) Montrer que l'application $P \mapsto (P(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est un isomorphisme de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ sur $\mathbf{R}^n$.

2) Soit g un endomorphisme de E commutant avec f.

   a) Montrer que les vecteurs propres de f sont propres pour g.

b) Montrer qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres communs à f et g.

c) Démontrer l'existence et l'unicité d'un polynôme $P \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$ tel que $g = P(f)$.

3) Montrer que l'ensemble des endomoprhismes de E qui commutent avec f est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ et préciser sa dimension.

4.7 *(Faustine Lacroix)*

4.7.1

a) Déterminer le rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)} x^{2n+1}$.

b) Trouver une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par f.

c) Donner la dérivée de la fonction arcsin. En déduire une expression de $f(x)$.

4.7.2

Soient A et B deux matrices de taille n ayant le même polynôme caractéristique,P.

a) On suppose que P possède n racines distinctes. Montrer que A et B sont semblables.

b) Trouver deux matrices A et B ayant même polynôme caractéristique sans être semblables.

4.8 *(Pascal Le)*

4.8.1

Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie.
On suppose que $f^2 = g^2 = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

1) Montrer que f et g sont des automorphismes diagonalisables.

2) Montrer que g induit un isomorphisme de $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ sur $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.
En déduire que la dimension de E est paire.

3) Montrer que f et g peuvent être représentées dans une base bien choisie de E par les matrices $\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & -I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$.

4.8.2

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ telle que $P(X = k) = \frac{a}{k+1}\binom{n}{k}$ avec $a \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^*$.

a) Exprimer $\binom{n}{k}$ en fonction de $\binom{n-1}{k-1}$.

b) Déterminez a pour qu'il s'agisse bien d'une loi de probabilité.

c) Calculer $E(X)$ puis $V(X)$.

4.9 *(Thomas Lesage)*

4.9.1

Soit a_n le terme général d'une série absolument convergente.

a) Montrer que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^n \,\mathrm{d}t = n!$

b) Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$.

c) Soit $f(x)$ la somme de cette série. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

4.9.2

Soit A la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ définie par $A_{i,j} = \alpha^{i+j-2}$.

a) Montrer que pour $\alpha \in \mathbf{R}$, A est diagonalisable.

b) Déterminer le rang de A et en déduire ses valeurs propres

c) Quelles sont les valeurs de α pour lesquelles A n'est pas diagonalisable ?

4.10 *(Noémie Neil)*

4.10.1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
On cherche un endomorphisme g de $\mathbf{R}^3$ tel que $g^2 = f$.

a) Déterminer les éléments propres de f. f est-elle diagonalisable ?

b) Montrer que si e_1 et e_3 sont propres pour f pour 1 et 3, alors $g(e_1)$ et $g(e_3)$ le sont aussi.

c) En déduire que si e_1 et e_3 sont propres pour f pour 1 et 3, ils sont propres pour g.

d) g peut-il être diagonalisable ?

4.10.2

Soit $F(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

a) Déterminer le domaine de définition de F.

b) Montrer que : $\forall x \in [0,1]$, $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

c) En admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer que $F(x) + F(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(1-x)\ln(x)$.

4.11 *(Amani Rigommier)*

4.11.1

Soit $p \in]0,1[$. On considère deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbf{N}$, de loi conjointe :
$P(X = k, Y = n) = \binom{n}{k}(1-p)^n p/2^p$ si $n \geqslant k$ et 0 si $n < k$.

a) Déterminer la loi de Y.

b) En partant du développement en série entière de $\frac{1}{1-x}$ montrer que :
$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$ pour tout $x \in]0,1[$.

c) En déduire la loi de X.

d) X et Y sont-elles indépendantes ?

4.11.2

Soit $(u_1, \dots, u_{n+1})$ une famille de vecteurs unitaires d'un espace euclidien de dimension n telle que :
$\exists a \in \mathbf{R}$, $\forall i \neq j$, $\langle u_i, u_j \rangle = a$.

1) Montrer que $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E.

2) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} u_k = 0_E$ et que $a = -\frac{1}{n}$.

4.12 *(Aurélien Simone)*

4.12.1

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

1) Retrouver la fonction génératrice $G_X(t)$.
2) Montrer que $P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{G_X(t)}{t^{2\lambda}}$.
3) Montrer que $P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^{\lambda}$.
4) Comparer avec Bienaymé-Tchebychev.

4.12.2

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Que peut-on dire de dét(A) s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $B^2 = A$?
2) Soit $a \in \mathbf{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 2+a & 2 & 1+a \\ 3-a & 3 & 3-a \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.
   Calculer dét(A). En déduire une condition pour qu'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $B^2 = A$.
3) Désormais $a \geqslant 0$. Déterminer les éléments propres de A puis donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
4) Désormais $a \neq 1$ et $a \neq 3$. Montrer que si M est telle que $M^2 = D$ alors $MD = DM$.
   Déterminer les matrices M telles que $M^2 = D$. En déduire les matrices B telles que $B^2 = A$.

5 Mines-Télécom

5.1 *(Hortense Abbeg)*

5.1.1

Pour $(a,b,c) \in \mathbf{C}^3$ et $n \in \mathbf{N}^*$ soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ définie par :
$A_{i,i} = a$; $A_{i,j} = b$ pour $j > i$ et $A_{i,j} = c$ pour $i > j$. Soit J la matrice $n \times n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que dét$(xJ + A)$ est un polynôme de degré au plus 1. En déduire dét(A).

5.1.2

Soit $a_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} (\sin t)^{2n} \, \mathrm{d}t$.

a) Montrer que la suite (a_n) est bien définie et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.
b) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*, (1+4n^2)a_n = (4n^2 - 2n)a_{n-1}$.
c) Soit $b_n = a_n\sqrt{n}$. Établir la convergence de la série de terme général $\ln\left(\frac{b_n}{b_{n-1}}\right)$.
d) Déterminer la nature de la série de terme général a_n.

5.2 *(Jade Ben Maamar)*

5.2.1

Déterminer un équivalent de $\sum_{k=n-1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ quand n tend vers l'infini, soit en faisant une comparaison série-intégrale, soit en utilisant une somme de Riemann.

5.2.2

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ et $\phi\colon M \mapsto M - \operatorname{tr}(M)A$.

a) Vérifier que ϕ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.

b) Déterminer les éléments propres de f.

c) Calculer le déterminant et la trace de ϕ.

5.3 *(Zina Camart)*

5.3.1

a) Montrer que si la série de terme général $f_n(x)$ converge uniformément sur une partie A de $\mathbf{R}$, alors la suite de terme général $f_n(x)$ converge uniformément vers 0 sur A.

b) Soit $f_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

   i) Établir la convergence simple de la série de terme général $f_n(x)$ pour tout $x \geqslant 0$.

   ii) La convergence est-elle uniforme sur $[0, +\infty[$?

5.3.2

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E.
On suppose qu'il existe $a \in E$ tel que $\big(a, f(a), f^2(a)\big)$ forme une base de E et $f^3(a) = a$.

a) Montrer que $f^3 = Id_E$ puis que f est un automorphisme de E. Préciser f^{-1}.

b) Montrer que si λ est une valeur propre pour f alors λ est une racine cubique de l'unité.

c) Déterminer les vecteurs propres de f.

5.4 *(François Fevre)*

5.4.1

Soit $I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \,\mathrm{d}t$.

a) Calculer I_0 et I_1.

b) Trouver une relation entre I_{n+2} et I_n.

c) En distinguant les cas n pair et n impair, déterminer une expression de I_n en fonction de n.

5.4.2

Montrer que l'ensemble des matrices trigonalisables est une partie fermée de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
Il y avait d'autres questions...

5.5 *(Thomas Lesage)*

5.5.1

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{C})$ telle que $A^4 = A^2$ et $\{-1, 1\} \subset \operatorname{Sp}(A)$. Montrer que A est diagonalisable.

5.5.2

Nature de la série de terme général $(-1)^n \sin\left(\frac{1}{(-1)^n + \sqrt{n}}\right)$?

5.6 *(Amani Rigommier)*

5.6.1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Avec le moins de calculs possible...

1) Donner le rang de la matrice.

2) Déterminer l'image de l'endomorphisme représenté par A.

3) Déterminer le noyau de l'endomorphisme représenté par A.

4) A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

5.6.2

Un exercice de probabilités.

5.7 *(Aurélien Simone)*

5.7.1

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+xn}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D de f.

2) Étudier la continuité de f sur D.

3) Déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$.

4) Étudier la dérivabilité de f sur D.

5.7.2

Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1) Déterminer le rang de T.

2) Sans utiliser le polynôme caractéristique, donner les valeurs propres de T.

3) T est-elle diagonalisable ?

6 ENSEA

6.1 *(Hortense Abbeg)*

6.1.1

On admet que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ et l'on considère $F(x) = \int_0^{+\infty} \cos(2xt)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

b) Trouver une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par F.

c) En déduire l'expression de F.

6.1.2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ représenté dans la base canonique par la matrice de coefficients $M_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$ si $i \leqslant j$ et 0 sinon.

a) Déterminer l'endomorphisme f.

b) Montrer que M est inversible et préciser M^{-1}.

c) M est-elle diagonalisable ? Préciser ses éléments propres.

6.2 *(Zina Camart)*

6.2.1

Dans $E = \mathbf{R}_4[X]$ on pose $\phi(P,Q) = \int_{-2}^{2} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Vérifier que ϕ est un produit scalaire.
2. Montrer que l'ensemble des polynômes pairs et l'ensemble des polynômes impairs sont des supplémentaires orthogonaux de E.
3. Déterminer une base orthogonale de E.
4. Dernière question non traitée avec une application f. Il fallait montrer que f était un endomorphisme symétrique, puis déterminer une base de vecteurs propres.

6.2.2

Soit $I_n = \int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier l'existence de I_n puis calculer sa valeur.
2. Montrer que $\int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{x})\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k k!}{(2k)!}$.

6.3 *(Agathe Douceur)*

6.3.1

Soit A l'ensemble des valeurs prises par une matrice 2x2 dont les coefficients suivent des lois uniformes indépendantes à valeurs dans $\{0, -1, 1\}$.

a) Quel est le cardinal de A ?

b) Quelle est la probabilité que la matrice soit inversible ?

c) Quel est la probabilité qu'elle soit de rang 1 ?

6.3.2

Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $(1 + n + n^2)x^n$ puis trouver une expression de la somme.

6.4 *(Alex Iortoman)*

6.4.1

Soit $f(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$

1. Soit $g(P) = (X^2-1)P''(X) + (2X+1)P'(X)$. Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}[\mathbb{X}]$.
2. g est-il diagonalisable ?
3. g est-il un automorphisme de $\mathbb{R}[\mathbb{X}]$?
4. Soient $(P,Q) \in \ (\mathbb{R}[\mathbb{X}])$. Montrer que $P(t)Q(t)f(t)$ est intégrable sur [-1,1].
5. Montrer que $< P,Q >= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)f(t)dt$ est un produit scalaire.

6.4.2

On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5}u_n$.

1. Étude de la suite.
2. Soit $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}(\frac{n+1}{n})^{3/2}$. Déterminer $a > 0$ tel que $\ln(v_n) = \frac{a}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$.
   En déduire la nature de la série de terme général $\ln(v_n)$.
3. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $u_n \sim \frac{C}{n^{3/2}}$.
4. Il y avait encore des questions.

6.5 *(Faustine Lacroix)*

Convergence et calcul de $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$.
Indication : calculer $u'(x)$ pour $u(x) = \sqrt{x}\frac{x}{1-x}$.

6.6 *(Beryl Spérélakis-Beedham)*

6.6.1

On donnait une matrice A de format 3x3.
On demandait de diagonaliser A puis de donner une méthode pour calculer A^n.

6.6.2

Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} n^x$.
Donner l'ensemble de définition de S puis étudier de la continuité de S sur ce domaine.

7 Navale

7.1 *(Marie-Sixtine Coville)*

7.1.1

Soit $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.

1. Donner le domaine de définition et de continuité de f.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et 1.

7.1.2

Dans un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E, on considère un projecteur p et un endomorphisme u vérifiant $u^n = Id_E$. On suppose que l'image de p est stable par u et l'on pose $q = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k}$.
Montrer que q est un projecteur dont le noyau est stable par u.

8 ENS Paris-Saclay

8.1 *(Christophe El Yammouni)*

8.1.1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E, annulé par un polynôme Q tel que $Q(0) = 0$ et $Q'(0) \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont supplémentaires.

8.1.2

Soit F un espace euclidien, v une involution de E, u un automorphisme orthogonal de E.

1. Montrer que v est diagonalisable.
2. Montrer que les espaces propres de u sont orthogonaux.
3. Soit x_0 un vecteur non nul de F et $u_{x_0} : x \mapsto x - 2 < x, x_0/\|x_0\|) > \cdot x_0/\|x_0\|$.
   Montrer que u_{x_0} est une involution orthogonale puis déterminer ses espaces propres.
   Quelle est l'interprétation géométrique de u_{x_0} ?
4. Soit v une involution orthogonale et w un automorphisme orthogonal.
   Montrer que $w \circ v \circ w^{-1}$ est une involution orthogonale et que
   $\mathrm{Ker}(w \circ v \circ w^{-1} - \mathrm{Id}_E) = w(\mathrm{Ker}(v - \mathrm{Id}_E))$.
5. Il s'agissait de montrer l'existence du conjugué u_{x_1} de u_{x_0} (i.e. il existe w un automorphisme orthogonal tel que $w \circ u_{x_0} \circ w^{-1} = u_{x_1}$). Enfin, on demandait si ce conjugué était unique.