Planche 1 *(Centrale 22)* On pose $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x}$.

1) Déterminer le domaine de définition D de I.
2) a) En utilisant le module scipy integrate, tracer $I(x)$ pour $x \in]1,30]$.
   Conjecturer les variations et les limites de I sur D.
   b) Avec la méthode des rectangles calculer $I(2)$.
   Comparer avec la vraie valeur et avec celle donné par scipy integrate.
3) a) Montrer que pour $x > 1$, $t \mapsto \ln(t)/t^x$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
   b) Montrer que I est de classe C^1 sur D.
4) Prouver les conjectures formulées dans la deuxième question.
5) a) Montrer que $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x} = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^{kx} \mathrm{d}t$.
   b) En posant $u = \frac{1}{t}$ montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x} = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^{kx+x-2} \mathrm{d}u$.
   c) Avec Python, représenter graphiquement $x \mapsto 1 - 2\sum_{k=1}^{100} \frac{(-1)^k}{(kx)^2-1}$ pour $x \in]1,30]$.
   d) Comparer $I(x)$ et $1 - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(kx)^2-1}$.
6) Trouver un équivalent de $I(x)$ quand x tend vers 1.

Planche 2 *(CCINP 21)* Soit $\mathscr{D}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant :
(i) les coefficients diagonaux sont valeurs propres et (ii) ce sont les seules valeurs propres.

1) Montrer que toute matrice triangulaire est dans $\mathscr{D}_n$.
2) La matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 est-elle dans $\mathscr{D}_n$?
3) $\mathscr{D}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$?
4) Montrer que si M appartient à $\mathscr{D}_n$ alors $M + aI_n$ appartient à $\mathscr{D}_n$ pour tout réel a.
5) Montrer que toute matrice de $\mathscr{D}_2$ est triangulaire.
6) Pour tout $t \in \mathbf{R}$, soit $M(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}$.
   a) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de la matrice $M(t)$ selon la valeur de t.
   b) En déduire les valeurs de t pour lesquelles $M(t) \in \mathscr{D}_3$.
   c) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ est diagonalisable.
7) Montrer qu'il existe une infinité de matrices de $\mathscr{D}_3$ de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$.
8) Exhiber une matrice de $\mathscr{D}_3$ à coefficients tous non nuls.

Planche 3 *(Mines-Télécom 22)*

1) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit $d_n = (1! + 2! + \cdots + n!)/n!$
   a) Trouvez une relation entre d_n et d_{n+1}.
   b) Trouvez une majoration de d_n.
   c) En déduire la convergence de d_n.
   d) Quel est la nature de la série de terme général $\frac{d_n}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$?
2) Soit $\mathscr{P}$ le sous-espace de $\mathbf{R}^4$ d'équations $\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ x + y - z - t = 0 \end{cases}$
   Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $\mathscr{P}$.

Planche 4 *(Centrale 21)* Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $E = \mathrm{Vect}\{A, B, C\}$.

1) Montrer que E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et déterminer sa dimension.
2) Montrer que pour tout $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ il existe un unique élément $M_{a,b,c}$ de E tel que $M_{1,1} = a$, $M_{2,1} = b$ et $M_{3,1} = c$. Écrire une fonction $M(a, b, c)$ qui renvoie $M_{a,b,c}$. Que vaut $J = M(1, 1, 1)$?
3) Donner une norme de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$. Écrire une fonction Norme(M) qui renvoie cette norme.
   En déduire une fonction test(M) qui renvoie True si M appartient à E et False sinon.
4) Donner les éléments propres de matrices $M_{a,b,c}$ pour a, b, c, choisis au hasard.
   Montrer que tous les éléments de E ont un vecteur propre commun.
5) Dans le cas où la trace de M est nulle, donner la forme du polynôme caractéristique de M.

Il y avait d'autres questions…