Planche 1 *(Centrale 2022)* Deux personnes se sont donné rendez-vous à 18 heures. Elles arrivent en retard de X et Y minutes respectivement. On suppose que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{0,\dots,59\}$.

1) À quoi correspond la variable $T=|X-Y|$?
2) Déterminer la loi de T.
3) Écrire une fonction `rdv(n)` qui renvoie les résultats de n simulations de T.
4) a) Calculer la valeur exacte de l'espérance de T.
   b) Donner une approximation de l'espérance avec Python. Commenter l'écart.
5) On pose $n=10^5$. Donner une fonction qui renvoie approximativement la loi de T à l'aide de la fonction `rdv`. Commenter les écarts.
6) On découpe une heure en N divisions de temps. Donner un équivalent de la probabilité que les deux personnes arrivent en même temps lorsque N tend vers $+\infty$.

Planche 2 *(CCINP 2023)* Une urne contient initialement deux boules rouges et deux boules blanches. On effectue une succession de tirage de la façon suivante : si on pioche une boule rouge, on la remet dans l'urne ; et si on pioche une boule blanche, on ne la remet pas.

Soit $U_n=\begin{pmatrix}P(X_n=0)\\P(X_n=1)\\P(X_n=2)\end{pmatrix}$ où X_n est le nombre de boules blanches dans l'urne après le n-ième tirage.

1) a) Diagonaliser $M=\begin{pmatrix}6&2&0\\0&4&3\\0&0&3\end{pmatrix}$.
   b) En déduire l'expression de M^n.
2) Déterminer A telle que : $\forall n\in\mathbf{N},\ U_{n+1}=AU_n$.
3) On note T_1 la variable aléatoire qui donne le numéro du tirage où l'on pioche une boule blanche pour la première fois. Déterminer la loi de T_1.
4) On note T_2 la variable aléatoire qui donne le numéro du tirage où l'on pioche la deuxième boule blanche. Déterminer la loi de T_2.

Planche 3 *(Mines-Télécom 2022)*

1) Soit $F(\lambda)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-\lambda x}}{x}\,\mathrm{d}x$
   a) Donner le domaine de définition de F.
   b) Montrer que F est de classe C^1 sur son domaine de définition et préciser $F'(x)$.
   c) En déduire une expression de $F(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
2) Déterminer toutes les matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$ symétriques et non diagonalisables.