Planche 1 *(Mines-Télécom 22)*

1) Pour $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ on pose $f(M) = \begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix}$.
   a) Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$.
   b) f est-il diagonalisable ? Quels sont ses éléments propres ?
2) Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x + \operatorname{ch}(t)}\,\mathrm{d}t$.
   a) Montrer que f est définie sur $]-1, +\infty[$.
   b) Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1, +\infty[$.
   c) Montrer que f possède une limite en $+\infty$ et la déterminer.

Planche 2 *(CCINP 22)*

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel E de dimension finie.

1) Montrer que si f est diagonalisable alors f^2 aussi.
2) Montrer que si f est diagonalisable alors $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$.
3) Soit λ une valeur propre non nulle de f^2 et μ une racine carrée complexe de λ.
   Montrer que : $\operatorname{Ker}(f^2 - \lambda \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Ker}(f - \mu \operatorname{Id}_E) \bigoplus \operatorname{Ker}(f + \mu \operatorname{Id}_E)$.
4) Montrer que si f^2 est diagonalisable et inversible alors f est diagonalisable et inversible.
5) Montrer que si f^2 est diagonalisable, f est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$.
6) Donner un exemple de matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{C})$ non diagonalisable telle que A^2 le soit.

Planche 3 *(Centrale 21)*

$(q_k)_{k \geqslant 1}$ étant une suite croissante d'entiers tous supérieurs ou égaux à 2, soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q_1 \cdots q_k}$.

1) Avec Python, calculer S_{100} pour différentes suites (q_k) vérifiant les conditions ci-dessus.
2) Prouver la convergence de S_n et donner un encadrement de sa limite L indépendant de (q_k).
3) a) Démontrer que $1/q_1 < L \leqslant 1/(q_1 - 1)$.
   En déduire une écriture de q_1 en fonction de L faisant appel à la fonction partie entière.
   b) Soit $X_p = (L - S_p)(q_1 \dots q_p)$. Écrire X_p sous forme d'une somme.
   c) En déduire l'unicité de la suite (q_k).
4) Montrer que pour tout réel $x \in]0, 1]$ il existe une suite (q_k) telle que $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/(q_1 \cdots q_k) = x$.
5) Écrire une fonction `decomp(x,n)` qui renvoie les n premiers termes de la suite correspondant à x.

Planche 4 *(Centrale 21)*

Pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ on pose $N(x, y) = \displaystyle\int_0^1 |x - ty|\,\mathrm{d}t$.

1) Vérifier que N est une norme sur $\mathbf{R}^2$.
2) Tracer la courbe de la fonction $x \mapsto N(x, 1)$ pour $x \in [-1/2, 3/2]$.
3) Calculer $N(x, 1)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. En déduire la valeur de $N(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.
4) Soit C le cercle unité, d'équation $x^2 + y^2 = 1$. Tracer la courbe de $x \mapsto N\left(x, \sqrt{1 - x^2}\right)$
   pour $x \in [-1, 1]$. Estimer, à l'aide de ce tracé, les valeurs de $\sup N(C)$ et $\inf N(C)$.
5) Déterminer la valeur exacte de $\sup N(C)$ et $\inf N(C)$.

Planche 5 *(Centrale 21)* Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ (x,y) \mapsto \dfrac{\operatorname{ch}(2y) - \cos(2x)}{2}$.

Et pour $r > 0$, $B_r = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2 + y^2 \leqslant r^2\}$; $\Omega_r = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2 + y^2 < r^2\}$ et $C_r = B_r \setminus \Omega_r$.

1) Pour $r > 0$ on pose $g_r : \theta \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
   a) Représenter g_r sur $[-2\pi, 2\pi]$ pour $r \in \{1, 2, 5, 10\}$.
   b) Conjecturer la périodicité et la parité de g_r, ainsi que ses variations sur $[0, \pi/2]$.
   c) En quels points g_r semble-t-elle atteindre son maximum ?
2) Montrer que f présente un minimum global sur $\mathbf{R}^2$ en $(0,0)$.
3) Préciser la nature topologique de B_r, Ω_r et C_r.
4) Montrer que f admet un maximum sur B_r, que l'on notera $M(r)$.
5) Soit F_r définie sur $[-r, r]^2$ par : $F_r(x,y) = f(x,y)$ si $(x,y) \in B_r$; et 0 sinon.
   a) Montrer que $M(r)$ est le maximum de F_r sur $[-r, r]^2$.
   b) Créer une fonction `F(r,x,y)` permettant de donner une valeur approchée de $F_r(x,y)$.
   c) Créer une fonction `M(r)` donnant une approximation du maximum de F_r, en cherchant le maximum des $F_r(x_i, y_j)$ pour $(i,j) \in [\![1, 100]\!]^2$, où $x_k = -r + \frac{2kr}{100}$ pour $k \in [\![1, 100]\!]$.
   d) Tracer $M(r)$ pour $r \in [0, 4]$ en prenant un pas de 0.1.
   e) Y superposer le tracé de $r \mapsto \operatorname{sh}^2 r$. Commenter.
6) a) Montrer que : $\forall t \in \mathbf{R}_+$, $\sin t \leqslant t \leqslant \operatorname{sh} t$.
   b) Prouver les conjectures de la première question.
   c) Montrer que f n'admet pas de maximum sur Ω_r.
7) Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x,y) = |\sin z|^2$ où $z = x + \mathrm{i}y$.
8) Prouver le résultat observé en 5.e)