1 Centrale 1

1.1 *(Alban Chalengeas)*

Soit $w \in \mathbf{C}$ et $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $P(X) = X^3 + wX^2 - \overline{w}X - 1$.

a) Discuter selon w le nombre de racines réelles de P.

b) Montrer que P admet toujours une racine complexe de module 1.

c) Établir que, pour toute racine z de P, $|z| \leqslant 1 + |w|$.

1.2 *(Alexandre Chemin)*

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto x - x^2$.

a) Quel est le plus grand intervalle contenant 0 sur lequel f est injective ?

b) Soit g la bijection réciproque de la restriction de f à cet intervalle.
Montrer que g est développable en série entière, en explicitant ce développement.

1.3 *(Alexandra Creis)*

On dit qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ vérifie la propriété $\mathscr{P}$ lorsque ses coefficients sont positifs et vérifient : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{i=1}^n M_{i,j} = 1$.

a) Montrer que l'ensemble des matrices vérifiant $\mathscr{P}$ est stable par multiplication.

Dans toute la suite, on considère une matrice M satisfaisant la propriété $\mathscr{P}$.

b) Montrer que 1 est valeur propre de M.

c) Montrer que toute valeur propre de M est de module inférieur ou égal à 1.

d) Montrer que si X est propre pour M pour une valeur propre de module 1, alors le vecteur dont les coordonnées sont les modules de celles de X est propre pour 1.

1.4 *(Alexandre Cymes)*

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. $\mathbf{R}^n$ est muni de sa base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ et du produit scalaire canonique. Pour tout sous-espace F de $\mathbf{R}^n$, on pose : $\delta(F) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} d(e_i, F)$.

a) Soit $G = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.
Montrer que G est un sous espace vectoriel, préciser sa dimension et calculer $\delta(G)$.

b) Soit F un sous espace de $\mathbf{R}^n$ de dimension k.
Montrer que $\sum_{i=1}^n d(e_i, F)^2 = n - k$. Que peut-on en déduire concernant $\delta(F)$?

1.5 *(Clément Dureuil)*

1.5.1

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ il existe un unique $u_n \in \mathbf{R}$ tel que $\exp(u_n) + nu_n = 2$.

b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $u_n x^n$.

c) Trouver trouver a et b tels que $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

1.5.2

Soit $f_n(x) = \dfrac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{1+x^2+x^n}$. Déterminer la limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n$ quand n tend vers l'infini.

1.6 *(Maxime Edouard)*

Pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ on pose $u_n(x, y) = \cos(ny)\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$.

a) Montrer que la série de terme général $u_n(x, y)$ converge pour $x \in]-1, 1[$ et $y \in \mathbf{R}$.

b) Montrer que la somme $S(x, y) = \sum_{n\geqslant 0} u_n(x, y)$ est continue sur $]-1, 1[\times\mathbf{R}$.

c) On fixe $y_0 \in \mathbf{R}$. Montrer que la suite $\big(\cos(ny_0)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini.

d) Donner le rayon de convergence de la série de terme général $u_n(x, y_0)$.

e) S est-elle de classe C^1 sur $]-1, 1[\times\mathbf{R}$?

1.7 *(Vincent Gefflaut)*

1) Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

   a) Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

   b) Simplifier $\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$. En déduire : $|P(A\cap B) - P(A)P(B)| \leqslant 1/4$.

2) Soit σ une variable aléatoire de loi uniforme sur $\mathscr{S}_n$, l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$.
   Pour $i \in [\![1, n]\!]$, E_i est l'événement "i est un point fixe de σ", c'est-à-dire : $\sigma(i) = i$.
   Soit R la variable aléatoire égale au nombre de points fixes de σ.

   a) Déterminer $P(E_i)$ et $P(E_i \cap E_j)$.

   b) Calculer l'espérance et la variance de R.

1.8 *(Brieuc Grisard)*

Soit a et b deux entiers naturels non nuls et N leur somme. Une urne contient initialement a boules noires et b boules blanches. On effectue une suite de tirages selon le protocole suivant :
- si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne ;
- si elle est noire, elle est remplacée par une boule blanche prise dans une réserve annexe.

On définit deux variables aléatoires : T_k vaut 1 si l'on pioche une boule noire au k-ième tirage et 0 sinon ; X_k est le nombre de boules noires piochées lors des k premiers tirages.

a) Déterminer la loi de T_1 et celle de T_2.

b) Montrer que $P(T_{n+1} = 1) = \frac{a-E(X_n)}{N}$. En déduire que $P(T_n = 1) = a\frac{(N-1)^{n-1}}{N^n}$.

c) Calculer $E(X_n)$ puis déterminer sa limite quand n tend vers l'infini.

1.9 *(Yann Offner)*

Soit $A \in O_{2p+1}(\mathbf{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^{2n+1}$ canoniquement associé à A.

a) Montrer que $|\mathrm{dét}(A)| = 1$ et que A admet 1 ou -1 comme valeur propre.

b) Montrer qu'il existe une droite vectorielle et un hyperplan (orthogonaux) stables par f.

c) On appliquait ces résultats à une matrice de $O_3(\mathbf{R})$.

1.10 *(Adrien Pascal)*

Soit X une variable aléatoire prenant des valeurs réelles $(x_1,\dots,x_n)$ avec $P(X=x_k)=p_k>0$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$. On pose $\Phi(t)=\mathrm{E}(\exp(\mathrm{i}tX))$ pour $t\in\mathbf{R}$.

a) Montrer que $|\Phi(t)|\leqslant 1$ pour tout $t\in\mathbf{R}$.

b) Montrer que $|\Phi(t)|^2=1-t^2\mathrm{V}(X)+o(t^2)$ quand t tend vers 0.

c) On suppose qu'il existe $a\in\mathbf{R}$, $b\in\mathbf{R}^*$ et, pour $k\in[\![1,n]\!]$, $m_k\in\mathbf{Z}$ tel que $x_k=a+bm_k$.
Montrer qu'il existe $t_0\in\mathbf{R}^*$ tel que $|\Phi(t_0)|=1$.

1.11 *(Baptiste Ruelle)*

Soit f une fonction continue de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$. Pour $x\in\mathbf{R}_+$ on pose $F(x)=\int_0^x f(x-t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+$ et donner une expression intégrale de $F'(x)$.

b) Dans le cas où $f(x)=1/(1+x)$ montrer que F est bornée sur $\mathbf{R}_+$.

c) Montrer que toute les solutions de $y''+y=1/(1+x)$ sont bornées sur $\mathbf{R}_+$.

1.12 *(Tanguy Vanlerenberghe)*

Soit $Q_0=1$ et pour $n\in\mathbf{N}^*$, $Q_n=\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$.
On s'intéresse à l'endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$, $\Delta : P\mapsto P(X+1)-P(X)$.

a) Montrer que $(Q_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

b) Calculer $\Delta(Q_n)$ pour $n\in\mathbf{N}$ puis déterminer l'image et le noyau de Δ.

c) Soit f un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$ tel que $f\circ\Delta=\Delta\circ f$.
Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}\in\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ telle que : $\forall P\in\mathbf{R}[X]$, $f(P)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\,\Delta^n(P)$.

1.13 *(Emilien Vigier)*

Soit $\mathscr{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien E et $f\in\mathscr{L}(E)$.

a) Exprimer $\sum_{k=1}^n \left\|f(e_k)\right\|^2$ à partir de la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

b) Montrer que cette somme ne dépend pas de la base orthonormée considérée.

c) Soit $T(f)$ cette somme. Montrer que si λ est une valeur propre réelle de f, alors $T(f)\geq\lambda^2$.

d) Montrer que si f est un projecteur alors $T(f)\geqslant \mathrm{rg}(f)$. Cas d'égalité ?

2 Centrale 2

(restitutions brutes…)

2.1 *(Alexis Brami)*

Pour $(m,n)\in\mathbf{N}^*$ on pose : $f_{m,n}(x_1,...,x_n)=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n}x_{i_1}\cdots x_{i_m}$ si $m\leqslant n$ et 0 sinon.

1. Calculer $f_{2,3}(x_1,x_2,x_3)$, $f_{1,n}(x_1,...,x_n)$ et $f_{m,n}(\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n})$.
2. On pose $u_m=m!f_{m,365}(\frac{1}{365},\dots,\frac{1}{365})$. Montrer que $u_m=\prod_{j=0}^{m-1}\frac{365-j}{365}$ et donner une représentation graphique des u_m. Déterminer le plus petit m tel que $u_m\leq 0,05$

3. a) Montrer que si $2 \leq m \leq n$, $f_{m,n}(x_1, \ldots, x_n) = x_n f_{m-1,n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) + f_{m,n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$
   b) Écrire une fonction $f(m, n, x)$ calculant $f_{m,n}(x_1, ..., x_n)$
4. Soit $E_n = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_1 + \cdots + x_n = 1\}$
   La question portait sur une conjecture en simulant "au hasard" E_n
5. On se place dans le cas $m = 2$ et $n = 3$.
   a) Déterminer le maximum de $(x, y) \mapsto x + y - x^2 - y^2 - xy$ sur $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$
   b) Démontrer la conjecture de la question 4.
6. A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que si $(x_1, \ldots, x_n) \in E_n$ alors $\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \frac{1}{n}$

2.2 *(Alban Chalengeas)*

Soit $H(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$ pour $x \in]-1, 1[$.

1. (a) Calculer la somme de cette série à 10^{-6} près en optimisant la complexité.
   (b) Montrer que $H(x)$ est équivalent à $\ln(2)/(1-x)$
2. Soit $G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ avec $b_n = \sum_{d|n} (-1)^{d-1}$
   (a) Avec Python donner la liste des b_n pour n variant de 1 à 20.
   (b) Déterminer le rayon de convergence de $G(x)$.
   (c) Montrer que $G(x) = H(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$.
3. Soit f une fonction décroissante, positive et intégrable sur $[0, +\infty[$.
   (a) Pour tout $\alpha > 0$ étudier la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n\alpha)$.

   Il y avait deux autres sous-questions…

2.3 *(Alexandre Chemin)*

On dispose de N dés équilibrés. On effectue n lancers (à chaque lancer on lance tous les dés en jeu). Au k-ième lancer (k allant de 1 à n) on note X_k le nombre de 6 obtenus ; et on retire du jeu les dés ayant donné 6. Soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Écrire une fonction python qui renvoie la valeur de X_1.
2. En déduire une fonction python qui renvoie la valeur de S_n.
3. Pour $M < k < N$ montrer que $\binom{N}{M}\binom{N-k}{M-k} = \binom{N}{k}\binom{N}{M}$ "ou qqe chose comme ça"
4. Montrer par récurrence que S_n suit une loi binomiale de paramètre (N, p_n) où l'on définira p_n par une formule de récurrence.
5. Calculer p_n en fonction de n.

"Il y avait d'autres questions, parlant notamment de fonctions de répartition"

2.4 *(Alexandra Creis)*

On pose $g(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$, $P_0 = 1$, $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (X - k)$ et $I_n = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^1 P_n(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que $\frac{\ln(1+x)}{x}$ admet un prolongement de classe C^∞ sur $]-1, 1[$.
2) En déduire que g admet un développement limité en 0 à tout ordre.

3) En effectuant des calculs sur les polynômes avec Python, calculer les 10 premiers coefficients du développement limité de $g(x)$ en 0.
4) Comparer avec les 10 premières valeurs de I_n. Que peut-on conjecturer ?
5) Trouver un encadrement judicieux de I_n afin de déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $I_n\,x^n$.
6) Comparer $\sum_{n\geq 0} I_n\,x^n$ et $\int_0^1 (1+x)^t\,\mathrm{d}t$; en déduire une preuve de la conjecture formulée en 4)

2.5 *(Alexandre Cymes)*

On pose $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x}$

1. Déterminer le domaine de définition D de I.
2. (a) En utilisant le module scipy integrate, tracer $I(x)$ pour $x \in]1,30]$.
   Conjecturer les variations et les limites de I sur D
   (b) Avec la méthode des rectangles calculer I(2). Comparer avec la vraie valeur et celle obtenue avec scipy integrate.
3. (a) Montrer que, pour $x > 1$, $f(t) = \ln(t)/t^x$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
   (b) Montrer que I est de classe C^1 sur D.
4. Calculer les limites de I aux bords de D.
5. (a) Montrer que $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x} = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^{kx}\,\mathrm{d}t$.
   (b) En posant $u = 1/t$ montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x} = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^{kx+x-2}\,\mathrm{d}u$
   (c) Avec Python, représenter graphiquement $x \mapsto 1 - 2\sum_{k=1}^{100} \frac{(-1)^k}{(kx)^2-1}$ pour $x \in]1,30]$
   (d) Comparer $I(x)$ et $x \mapsto 1 - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(kx)^2-1}$
6. Trouver un équivalent de $I(x)$ en 1. (On donnait la valeur d'une certaine somme égale à $\frac{\pi^2}{12}$)

2.6 *(Jérémy Cochard)*

Pour $n \geq 1$ soit $M_n \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ définie par $[M_n]_{i,i} = 0$ et $[M_n]_{i,j} = j+1$ pour $j \neq i$.
On considère également $f_n(x) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{x+k}$

1. Écrire des fonctions Python renvoyant M_n et $f_n(x)$.
2. Pour $n \in \{2,3,5,10\}$ déterminer les valeurs propres de M_n et les dimensions des sous-espaces propres. Conjecture ?
3. Pour $n \in \{2,3,5,10\}$ représenter graphiquement $f_n(x)$ pour $x \in [-15,15]$ avec un pas de 0.01. Déterminer des valeurs approchées des solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et conjecturer un lien avec M_n.
4. Étudier les variations de f_n puis déterminer d_n le nombre de solutions de l'équation $f_n(x) = 0$, ainsi que le signe de la solution la plus grande.
5. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Trouvez une condition nécessaire et suffisante pour que $X_\lambda = (1/(1+i+\lambda))_{0\leqslant i\leqslant n-1}$ soit un vecteur propre de M_n.

2.7 *(Clément Dureuil)*

On a initialement une urne avec un boule rouge et une boule noire. On effectue des tirages avec remise et à chaque fois que l'on tire une boule on en rajoute une de la même couleur dans l'urne. On note X_n (resp. Y_n) le nombre de boules rouges (resp. noires) au n-ième tirage. Pour $(u,v) \in \mathbf{R}^2$ on pose $P_n(u,v) = \sum_{(i,j)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*} P(X_n = i, Y_n = j)u^i v^j$ (on remarquera que cette double somme est finie)

1a) Coder la fonction simulation(n) qui prend en argument le nombre de tirage et qui renvoie la valeur de X_n.

1b) Coder la fonction moyenne(n,N) qui prend en argument n le nombre de tirage et N le nombre reproduction de l'expérience et qui renvoie une liste L telle que $L[i]$ correspond a la proportion (sur les N Expériences) d'expériences menant à $X_n = i$.

1c) Tester pour des valeurs de N très grandes. Qu'observez-vous ?

2a) Pour $(i,j) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ exprimer $P(X_{n+1} = i, Y_{n+1} = j)$ en fonction de $P(X_n = i, Y_n = j-1)$ et de $P(X_n = i-1, Y_n = j)$.

2b) Montrer que $P_{n+1}(u,v) = (u^2 \frac{\partial}{\partial u} P_n(u,v) + v^2 \frac{\partial}{\partial v} P_n(u,v))/(n+2)$

2c) Il fallait trouver par récurrence à l'aide de 2b) l'expression de $P_n(u,v)$.

2d) Comparer avec 1)

3) Modifier le programme moyenne pour qu'il renvoie True si la n-ième boule est rouge, False sinon. Calculer le nombre moyen de True obtenus sur un grand nombre d'essais.

2.8 *(Maxime Édouard)*

Soit E_n l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ à coefficients strictement positifs.

1) En utilisant la commande random, écrire une fonction qui renvoie une matrice de E_n.
2) Écrire une fonction qui renvoie les valeurs propres d'une matrice de E_n.
   Tester plusieurs valeurs de n afin de conjecturer le signe des valeurs propres.
3) Soit $A \in E_n$ de valeurs propres $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$ constituée de vecteurs propres associés à ces valeurs.
   a) Avec Python, déterminer pour différentes valeurs de n les λ_i et les X_i.
      Que peut-on conjecturer concernant les coefficients deX_n ?
   b) Montrer que : $\forall Y \in \mathbf{R}^n,\ Y^\top A\, Y \leqslant \lambda_n \|Y\|^2$. Cas d'égalité ?
   c) En considérant le vecteur Z_n dont les coordonnées sont les valeurs absolues de celles de X_n, démontrer le résultat précédemment conjecturé.
4) On considère $M = \begin{pmatrix} A & aX_n \\ aX_n^\top & 0 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbf{R}$.
   a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.
      Déterminer les valeurs propres de A, puis de M pour certaines valeurs de a.
   b) Déterminer dans le cas général les valeurs propres de M. (On exprimera χ_M à l'aide de χ_A)
   c) Il y avait une dernière question…

2.9 *(Vincent Gefflaut)*

On cherche à déterminer la 2020-ième "décimale" de la décomposition en base 2 de $\ln(2)$.

1) Programmer une fonction de complexité $O(\ln(n))$ qui retourne x^n pour $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$.
2) Justifier que $\ln(2) = \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k2^k}$.
3) Pour $x \in]0,1[$ et $i \in \mathbf{N}^*$ on définit $\varepsilon_i(x) = \lfloor 2^i x \rfloor - 2\lfloor 2^{i-1}x \rfloor$.
   a) Montrer que $\varepsilon_i(x) \in \{0,1\}$ pour tout $i \in \mathbf{N}^*$.
   b) En déduire que $x = \sum_{i\geqslant 1} \frac{\varepsilon_i(x)}{2^i}$
   c) Montrer que la suite $(\varepsilon_i(x))_{i\geqslant 1}$ ne peut pas être égale à 1 à partir d'un certain rang.
4) Il y avait d'autres questions...

2.10 *(Brieuc Grisard et Raphaël Azancot)*

On pose $f_a(x) = \cos(x^a)$ pour $x > 0$ et $\mathrm{ch}((-x)^a)$ pour $x \leqslant 0$.

1. Définir cette fonction avec python et la représenter graphiquement sur $[-1,1]$ pour $a \in \{0.1, 0.4, 0.5, 0.6\}$. f_a semble-t-elle de classe C^1 ?
2. À l'aide d'un développement limité à gauche et à droite de zéro, préciser les valeurs de a pour lesquelles f_a est C^1.
3. Pour quelles valeurs de a f_a est-elle développable en série entière ? Quel est alors le rayon de convergence ?

Il y avait d'autres questions très calculatoires où l'on fragmentait un segment afin d'obtenir une inégalité...

2.11 *(Chems-Eddine Hakmi)*

Soit E_n l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant : $\forall (i,j) \in [1,n]^2, A_{i,n+1-j} = A_{n+1-i,j}$.
Soit S_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par : $S_{i,j} = 1$ si $i + j = n+1$ et 0 sinon.

1. (a) Écrire une fonction $A(n)$ qui renvoie une matrice de E_n dont les coefficients sont des entiers naturels pris au hasard entre 0 et 10.
   (b) Déterminer pour différentes matrices M dans E_n, $MS_n - S_nM$.
2. Montrer que E_n est un espace vectoriel stable par transposition. Donner sa dimension.
3. Pour $n = 5$
   (a) À l'aide de A écrire une fonction $B(n)$ renvoyant une matrice symétrique ayant des valeurs propres 2 à 2 distinctes.
   (b) Trouver P inversible tel que $P^{-1}BP$ soit diagonale.
   (c) Déterminer $P^{-1}BP$ et $P^{-1}S_nP$
4. Montrer que $M \in E_n \iff MS_n = S_nM$

Il y avait 3 autres questions...

2.12 *(Yann Offner)*

Soit (E) l'équation différentielle : $xy'' + y' + y = 0$.

1) a) Que peut-on dire de l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbf{R}_+^*$?
   b) Combien y a-t-il de solutions de (E) vérifiant $y'(1) = 1$ et $y(1) = 0$?
2) a) Avec Python représenter graphiquement la solution de (E) vérifiant $(y'(1), y(1)) = (0,1)$ puis $(1,0)$ puis $(1,-1)$ sur un intervalle adapté.
   b) Trouver les solutions f de (E) telles que $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. (on déterminera une relation de récurrence vérifiée par (a_n) puis explicitera l'expression de a_n en faisant intervenir une factorielle).
   c) Représentez graphiquement f avec Python.
   d) Montrer que f est décroissante sur $[0,2]$.
   e) Évaluer $f(2)$. Que peut-on dire de $\{x > 0, f(x) = 0\}$?
   f) Déterminer la limite de $f(x)$, puis celle de $f(x)/x$, lorsque x tend vers $+\infty$.

2.13 *(Adrien Pascal)*

Soit φ une application vérifiant $\varphi''(t) = 1 - 3\frac{\varphi'(t)^2}{\varphi(t)}$ avec $\varphi(0) = \alpha$ et $\varphi'(0) = \beta$.

1. Représenter graphiquement $\varphi(t)$ pour $\alpha = 1$ et $\beta = 0$. Commenter la courbe obtenue.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour qu'un polynôme de degré 2 soit solution de cette équation différentielle. Vérifier ce résultat avec python.
3. On pose $\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{7}(x - \frac{1}{x^6})}$ pour $x > 1$ et $\psi(1) = 0$. Soit $G(x) = \int_1^x \frac{1}{\psi(u)}\,\mathrm{d}u$.
   Montrer que $G(x)$ est bien définie et continue ; étudier ses variations
4. On admet que $G(x) = C_1 + C_2\sqrt{x} + o(\sqrt{x})$. Trouver en utilisant python les valeurs de C_1 et C_2.
5. Il y avait une 5ème question…

2.14 *(Tom Roitman)*

On définit $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k}$ et $P(X) = X^2 - X - 1$. On note α la plus petite racine de P.
La suite de Fibonacci est définie par $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ et $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$.

1. Montrer que f est bien définie sur $]-1;1[$ puis montrer qu'elle y est de classe C^1.
2. Soit $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{1-x^k}$.
   (a) Écrire une fonction f(n,x) renvoyant $f_n(x)$.
   (b) Tracer $f_n(x)$ sur $]-1;1[$.
3. (a) Écrire une fonction SommeFibo(n) renvoyant $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{F(2k)}$
   (b) Conjecturer la valeur de $\sum_{k=1}^{infty} \frac{1}{F(2k)}) - \sqrt{5}(f(\alpha^2) - f(\alpha^4))$
   (c) Trouver une expression de $F(n)$ en fonction de α puis démontrer la conjecture.
4. Il y avait une dernière question.

2.15 *(Baptiste Ruelle)*

import numpy as np
import numpy.random as rd
Pour $n \in \mathbf{N}^*$ on définit $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ et $F_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k^2$.

1. Déterminer la nature de ces deux suites.
   Donner une approximation raisonnable de leur limite éventuelle.
2. Soit R la variable aléatoire égale au nombre de lancers de dé nécessaires pour obtenir au moins une fois chaque face du dé.
   a) Écrire une fonction qui renvoie la valeur de R ainsi que la liste des lancers de rang inférieur ou égal à R.
   b) Écrire une fonction d'argument N qui renvoie la moyenne de R sur N lancers.
   Donner une approximation raisonnable de l'espérance de R.
3. On pose $T_0 = 0$ et T_i le nombre de lancers nécessaires pour obtenir au moins i résultats différents pour $i \in [\![1,6]\!]$. Soit $X_i = T_i - T_{i-1}$.
   a) Déterminer l'expression de T_i en fonction des X_j pour $1 \leqslant j \leqslant i$
   b) Déterminer la loi de probabilité de X_i
   c) Déterminer l'espérance et la variance de T_i
   d) Sur quel segment $[a,b]$ faut-il se placer pour que $P(T_i \in [a,b]) \geqslant 0.9$?
4. Combien de personnes tirées aléatoirement faut-il pour que la probabilité que chaque jour d'une année bissextile soit l'anniversaire d'une des personnes du groupe soit supérieure à...

2.16 *(Joan Simonet)*

Pour $x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$ on pose $f(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} 1/(n-x)^2$, c'est-à-dire $f(x) = 1/x^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}[1/(n-x)^2 + 1/(n+x)^2]$.

1. (a) Montrer que f est définie sur $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$.
   (b) Montrer que f est 1-périodique.
   (c) Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$.
   (d) Représenter graphiquement f sur $[10.1;10.9]$. On étudiera l'impact du changement d'intervalle et on tronquera la somme à différents entiers. Commenter les courbes obtenues.
2. On pose, pour $x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$, $g(x) = f(x) - \pi^2/\sin^2(\pi x)$
   (a) Montrer que g est prolongeable par continuité sur $\mathbf{R}$.
   (b) Représenter graphiquement g. Que peut-on conjecturer ?
3. Montrer que $g(x/2) + g((x+1)/2) = 4g(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
4. Établir une certaine égalité pour f...

2.17 *(Maxence Zhuang)*

import numpy as np
import numpy.linalg as alg

1. Pour $x \in \mathbf{R}$, déterminer la limite de $(1+x/n)^n$ quand n tend vers l'infini.

2. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on considère la matrice $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1/n & 1/n \\ 1/n & 1 & 1/n \\ 1/n & 1/n & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Écrire une fonction prenant en argument n et renvoyant A_n

   (b) Conjecturer la limite de A_n^n quand n tend vers l'infini.

   (c) Diagonaliser A_n et démontrer la conjecture.

3. Soit m un entier supérieur ou égale à 3. On note $A(m,n)$ la matrice carrée de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ avec des 1 sur la diagonale et $1/n$ ailleurs, J_m la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

   (a) Exprimer $A(m,n)$ en fonction de I_m et J_m.

   (b) Écrire une fonction d'argument (m,n) qui renvoie $A(m,n)$

   (c) Conjecturer la limite de $A(m,n)^n$ quand n tend vers l'infini.

   (d) Que vaut J_m^n ?

   (e) En déduire la limite de $A(m,n)^n$ quand n tend vers l'infini.

3 CCINP

3.1 *(Sidonie Bes)*

3.1.1

a) Justifier l'existence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que $\frac{\sin t}{\operatorname{sh} t} = 2\mathrm{e}^{-t}\sin(t)\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2nt}$.

c) En déduire que $I = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1+(2n+1)^2}$.

d) Montrer que $\frac{\pi}{4} < I < 1 + \frac{\pi}{4}$.

3.1.2

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant $(\mathscr{P}) : M^3 - 4M = 0$ et $\operatorname{tr}(M) = 0$.

a) Montrer que les valeurs propres de M sont racines de $X^3 - 4X$.

b) Caractériser les matrices vérifiant $(\mathscr{P})$.

3.2 *(Florentin Brunner)*

3.2.1

Pour $n \in \mathbf{N}$ on pose $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$ si $x \geq 0$, $\frac{nx^3}{1+nx^2}$ si $x < 0$.

a) Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbf{R}$ vers une fonction que l'on précisera.

b) Montrer que (f_n') converge simplement sur $\mathbf{R}$, mais pas uniformément.

3.2.2

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

a) Donner l'espérance et la variance de X.

b) Soit $A = \min(X,Y)$ et $B = \max(X,Y)$. A et B sont-elles indépendantes ?

c) Soit Z une variable aléatoire telle que la loi conditionnelle de Z sachant $(X = k)$ suive une loi binomiale de paramètres (k,p). Déterminer la loi de Z.

3.3 *(Alban Chalengeas)*

3.3.1

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^3)$ vérifiant $u^3 = -u$ et $u \neq 0$.

a) Montrer que $\operatorname{Im}(u^2 + \mathrm{Id}) \subset \operatorname{Ker}(u)$.

b) Montrer que $\mathbf{R}^3 = \operatorname{Ker}(u) \bigoplus \operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id})$.

c) Monter que ni $\operatorname{Ker}(u)$ ni $\operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id})$ n'est réduit au vecteur nul.

d) Montrer que u peut être représenté dans une certaine base par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3.3.2

Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On effectue n tirages avec remise.
On considère l'évènement B_i : "On obtient i boules blanches au terme des n tirages".

a) Calculer la probabilité de B_i.

b) Montrer que $\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i} x^{2i} = \frac{1}{2}\left((1+x)^n + (1-x)^n\right)$.

c) En déduire la probabilité que l'on ait tiré un nombre pair de boules blanches.

3.4 *(Alexandra Creis)*

3.4.1

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On effectue n tirages avec remise.
On note M_n le maximum des numéros obtenus lors de ces n tirages.

a) Calculer $P(M_n \leqslant k)$ pour $k \in [\![1, N]\!]$. En déduire la loi de M_n.

b) Montrer que $P(M_n = k) = P(M_n > k-1) - P(M_n > k)$. En déduire $E(M_n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(M_n > k)$.

c) Quelle est la limite de $E(M_n)$ quand n tend vers l'infini ? Interprétation ?

d) Montrer que $E\left(M_n(M_n - 1)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} k\, P(M_n > k)$. En déduire la variance de M_n.

3.4.2

Soient A et B deux matrices de taille n ayant le même polynôme caractéristique,P.

a) On suppose que P possède n racines distinctes. Montrer que A et B sont semblables.

b) Trouver deux matrices A et B ayant même polynôme caractéristique sans être semblables.

3.5 *(Laura Darty et Arthur Dumerc)*

3.5.1

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt^2)\exp(-t)\,\mathrm{d}t$

a) Montrer que F est définie et de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.

b) Calculer $F^k(0)$ pour $k \in \mathbf{N}$. F est-elle développable en série entière ?

3.5.2

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel E de dimension finie.

a) Montrer que si f est diagonalisable alors f^2 aussi.

b) Montrer que si f est diagonalisable alors $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$.

c) Soit λ une valeur propre non nulle de f^2 et μ une racine carrée complexe de λ.
Montrer que : $\operatorname{Ker}(f^2 - \lambda) = \operatorname{Ker}(f - \mu) \bigoplus \operatorname{Ker}(f + \mu)$.

d) Montrer que si f^2 est diagonalisable et inversible alors f est diagonalisable et inversible.

e) Montrer que si f^2 est diagonalisable, f est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$.

3.6 *(Théo Gaudin et Piere-Louis Géli)*

3.6.1

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^3)$ vérifiant $f^3 = \mathrm{Id}$ et $f \neq \mathrm{Id}$.

a) Montrer que 1 est valeur propre de f.

b) Montrer que $\mathbf{R}^3 = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) \bigoplus \operatorname{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id})$.

c) Montrer que f peut être représenté dans une certaine base par $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.6.2

Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On effectue n tirages avec remise.
On considère l'évènement B_i : "On obtient i boules blanches au terme des n tirages".

a) Calculer la probabilité de B_i.

b) Montrer que $\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i} x^{2i} = \frac{1}{2}\left((1+x)^n + (1-x)^n\right)$.

c) En déduire la probabilité que l'on ait tiré un nombre pair de boules blanches.

3.7 *(Brieuc Grisard)*

3.7.1

On pose $f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

a) f est-elle continue sur $\mathbf{R}$?

b) Calculer les dérivées partielles de f.

c) f est-elle de classe C^1 sur $\mathbf{R}$?

d) Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Conclusion?

3.7.2

Pour A et B dans $\mathbf{R}[X]$ on pose $\varphi(A,B) = \int_0^{+\infty} A(t)B(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer φ définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.

b) Soit Q le projeté orthogonal de 1 sur $F = \operatorname{vect}(X, X^2, \dots, X^n)$.
Justifier l'existence de $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbf{R}^n$ tel que $Q = \sum_{k=1}^n a_k X^k$.

c) Soit $P = 1 - \sum_{k=1}^n a_k (X+1)\cdots(X+k)$.
En considérant $\varphi(1-Q, X^k)$, montrer que $P(k) = 0$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

d) Déterminer la valeur de a_n ; puis la distance de 1 à F.

3.8 *(Chems-Eddine Hakmi)*

3.8.1

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$ vérifiant :
$P(X=k,Y=n)=\binom{n}{k}p(1-p)^n/2^n$ pour $k\leqslant n$ et 0 sinon.

a) Calculer $P(Y=n)$.

b) Donner le développement en série entière de $\frac{1}{1-x}$; en déduire : $\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n-k}=\frac{1}{(1-x)^{k+1}}$ $(\forall k\in\mathbf{N})$.

c) Calculer $P(X=k)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

3.8.2

Soit $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&3&-3\\-2&2&-2\end{pmatrix}$ et f un endomorphisme d'un espace E, représenté par A dans une base $\mathscr{B}$.

a) Montrer que $E=\mathrm{Ker}(f^2)\oplus\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id}_E)$.

b) Trouver un vecteur de $\mathrm{Ker}(f^2)$ qui ne soit pas dans $\mathrm{Ker}(f)$.

c) Trouver une base $\mathscr{B}'$ dans laquelle f soit représenté par $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

d) Montrer que si un endomorphisme g commute avec f alors $\mathrm{Ker}(f^2)$ est stable par g.

e) En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphisme g tel que $g\circ g=f$.

3.9 *(Aymeric Lacroix)*

3.9.1

Soit (u_n) définie par $u_0=3$ et $u_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_ku_{n-k}$.

a) Montrer que $0\leqslant u_n\leqslant 4^{n+1}n!$ pour tout n.

b) On pose $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_nx^n}{n!}$. Montrer que f est solution de l'équation $y'=y^2$ sur un $]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[$.

c) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

3.9.2

Soit A une matrice antisymétrique et f l'endomorphisme associé à A.

a) Montrer que f est antisymétrique, c'est à dire que : $\forall(x,y)\in E\times E, <f(x),y>=-<x,f(y)>$.

b) i) Montrer que $\mathrm{dét}(f)=(-1)^n\mathrm{dét}(f)$. Que peut on en déduire ?
   ii) Montrer que l'image et le noyau de f sont supplémentaires.
   iii) Montrer que la restriction de f à $\mathrm{Im}(f)$ est injective. En déduire que le rang de f est pair.

c) On se place ici en dimension 3. Montrer qu'il existe une base orthonormée dans laquelle f est représentée par $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-a\\0&a&0\end{pmatrix}$. f est-elle diagonalisable ?

3.10 *(Yann Offner)*

3.10.1

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ telle que $P(X=k)=\frac{a}{k+1}\binom{n}{k}$ avec $a\in\mathbf{R}$ et $n\in\mathbf{N}^*$.

a) Exprimer $\binom{n}{k}$ en fonction de $\binom{n-1}{k-1}$.

b) Déterminez a pour qu'il s'agisse bien d'une loi de probabilité.

c) Calculer $E(X)$ puis $V(X)$.

3.10.2

Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2$ vérifiant $AB = BA$. On considère $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix}$.

a) Montrer que si U et V sont deux matrices carrées semblables alors, $P(U)$ et $P(V)$ sont semblables pour tout $P \in \mathbf{C}[X]$.

b) Pour $P \in \mathbf{C}[X]$, exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A)$, $P'(A)$ et B.

c) Montrer que si M est diagonalisable alors A est diagonalisable et $B = 0_n$.

3.11 *(Antoine Rakotomanga)*

3.11.1

Soit $S(x) = \sum_{n \geqslant 2} \frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$.

a) Déterminer le domaine D de convergence cette série de fonctions.

b) Montrer que cette série ne converge pas normalement sur D.

c) Montrer que : $\forall x \in D,\ \forall n \in \mathbf{N}^*,\ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant \frac{1}{\ln(n+1)}$.

d) Montrer que S est continue sur D. Est-elle intégrable ?

3.11.2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On cherche un endomorphisme g de $\mathbf{R}^3$ tel que $g^2 = f$.

a) Déterminer les éléments propres de f. f est-elle diagonalisable ?

b) Montrer que tout vecteur propre pour g est nécessairement propre pour f.

c) g peut-il être diagonalisable ? Quel est son spectre ? Le problème a-t-il des solutions ?

3.12 *(Baptiste Ruelle)*

3.12.1

Soit φ continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant : $\left|\varphi(x)\right| \leqslant \frac{C}{1+x^2}$.

On pose $f(x) = \varphi(x) + \sum_{n \geqslant 1} \left[\varphi(x+n) + \varphi(x-n)\right]$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbf{R}$, continue et 1-périodique.

b) Soit g une fonction 1-périodique et continue sur $\mathbf{R}$.
Montrer que φg est intégrable sur R et que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x) g(x)\,\mathrm{d}x$.

3.12.2

Soit a l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Monter que A est trigonalisable mais pas diagonalisable dans $\mathbf{R}$.

b) Déterminer les droites stables par a.

c) Soit F un sous-espace stable par a et a' la restriction de a à F.

  i) Montrer que $\chi_{a'}$ divise χ_a.

  ii) Montrer que si $F \neq \mathbf{R}^3$, $F \subset \mathrm{Ker}(a - 3\mathrm{Id})^2$.

  iii) Déterminer les plans stables par a.

3.13 *(Joan Simonet)*

3.13.1

On s'intéresse à l'équation différentielle $(E) : y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$. Soit F l'ensemble des fonctions de classe C^∞ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et G l'ensemble des fonctions 3 fois dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant (E). On note Δ l'opérateur de dérivation.

a) Montrer que G est inclus dans F et que Δ est un endomorphisme de F.

b) Trouver un polynôme P tel que $G = \mathrm{Ker}(P(\Delta))$ et factoriser ce polynôme.

c) Montrer que $G = \mathrm{Ker}(\Delta^2 - \mathrm{Id}_F) \bigoplus \mathrm{Ker}(\Delta + 2\mathrm{Id}_F)$.

d) En déduire une base de G.

3.13.2

a) Montrer que : $\forall x \in [0,1]$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$.

b) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2} \right)$ converge pour tout $x \in [0,1]$.

c) Calculer la somme de cette série.

d) La convergence est-elle uniforme sur le segment $[0,1]$?

3.14 *(Émilien Vigier)*

3.14.1

Soit $p \in \mathbf{N}$.

a) Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{n^p}{2^n}$ converge. On note S_p la valeur de la somme.

b) En développant $(n+1)^p$, exprimer S_p en fonction de $S_0, \ldots, S_{p-1}$.

c) En déduire que $S_p \in \mathbf{N}$ pour tout $p \in \mathbf{N}$.

3.14.2

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ diagonalisable de rang 1 et $B = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha + \beta = \gamma$, $\beta + \gamma \neq 0$ et $\beta\gamma \neq 0$.

a) Exprimer le polynôme caractéristique de B à l'aide de celui de A.
En déduire les valeurs propres de B.

b) Montrer que si X est dans le noyau de A, alors $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$ est dans le noyau de B.

c) Montrer que $\dim(\mathrm{Ker} B) \geqslant 2 \dim(\mathrm{Ker} A)$ et que B est diagonalisable.

d) Diagonaliser B pour un certain triplet de valeurs (α, β, γ).

3.15 *(Maxence Zhuang)*

3.15.1

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbf{R}$.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$ (On donnait la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/k^2$)

c) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^*$.

d) Déterminer la limite de $f'(x)$ quand x tend vers 0.

e) Donner l'allure de la courbe représentative de f.

3.15.2

Soit E un espace euclidien.

a) Caractérisation des endomorphismes autoadjoints définis positifs ?

b) Soit a et b deux endomorphismes autoadjoints définis positifs.
Montrer qu'il existe un unique endomorphisme c vérifiant $b = a \circ c + c \circ a$.

c) Montrer que c est symétrique positive.

4 Mines-Ponts

4.1 *(Arthur Dumerc)*

4.1.1

a) Montrer que $g(x) = 1/\cos(x)$ est développable en série entière.

b) Donner un encadrement du rayon de convergence de cette série entière.

4.1.2

a) Déterminer les formes linéaires f sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ vérifiant : $\forall (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2,\ f(MN) = f(NM)$.

b) Déterminer $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}),\ \mathrm{tr}(AM) = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(M)$.

4.2 *(Clément Dureuil)*

4.2.1

a) On définit une suite par $b_0 < 0$ et $b_k = \frac{(4k-3)(4k-5)}{16k^2} b_{k-1}$ pour $k \in \mathbf{N}^*$.
Montrer l'existence d'un couple de réels strictement positifs (c,d) tel que $b_k \sim \frac{c}{k^d}$.

b) Soit $B_k = \frac{1}{64^k}\binom{4k}{2k}\binom{2k}{k}$.
Montrer l'existence d'un couple de réels strictement positifs (C,D) tel que $B_k \sim \frac{C}{k^D}$.

4.2.2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et f_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ défini par : $f_A(M) = AM$.
Déterminer la trace et le rang de f_A.

4.3 *(Vincent Gefflaut)*

4.3.1

On définit une suite de polynômes par : $U_0 = 1$, $U_1 = 2X$ et $U_n = 2XU_{n-1} - U_{n-2}$ pour $n \geqslant 2$.

a) Donner le degré et le coefficient dominant de U_n pour $n \in \mathbf{N}$.

b) Montrer que : $\forall \theta \in \mathbf{R}$, $(\sin\theta)\, U_n(\cos\theta) = \sin((n+1)\theta)$.

c) Montrer que U_n admet n racines distinctes et préciser sa factorisation dans $\mathbf{R}[X]$.

d) Étudier la rationalité des racines de $V_n(X) = U_n(X/2)$.

e) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, quelles sont les valeurs de $k \in [\![1,n]\!]$ pour lesquelles $\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ est un rationnel ?

4.3.2

Soit $f(x) = \int_0^1 |\ln t|^x \, \mathrm{d}t$.

a) Donner le domaine de définition D de f.

b) Montrer que f est de classe C^∞ sur D.

c) Trouver l'expression de $f(n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Il y avait deux autres questions. . .

4.4 *(Ewen Houppé)*

4.4.1

Pour f continue et bornée de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ on pose $L(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que L est définie et de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que $L(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

c) Si $f(0) \neq 0$, déterminer un équivalent de $L(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

d) Montrer que si $L(0)$ existe alors L est continue en 0.

e) Montrer que si $t f(t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ alors L est dérivable en 0.

4.4.2

Résoudre $M^3 + M = 0$ dans $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

4.5 *(Yann Offner)*

4.5.1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice antisymétrique.

a) On suppose dans un premier temps que A est inversible. Montrer que n est pair.

b) Montrer que les valeurs propres de A sont des imaginaires purs.

c) Montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs $M = \mathrm{diag}(B_1,\dots,B_p)$ avec $B_i = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_i \\ -\alpha_i & 0 \end{pmatrix}$ et $\alpha_i > 0$. Que peut-on dire si on enlève l'hypothèse d'inversibilité ?

4.5.2

Résoudre $x(x-1)\dfrac{\partial f}{\partial x} + y(x-1)\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 f(x,y)$ en posant $x = u$ et $y = uv$.

4.6 *(Adrien Pascal)*

4.6.1

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} & & (0) & \\ 1 & 0 & \frac{2}{n} & & \\ & \frac{n-1}{n} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & 1 \\ & (0) & & \frac{1}{n} & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbf{R})$

a) Trouver un endomorphisme φ de $\mathbf{R}_n[X]$ tel que A soit la matrice de φ dans la base canonique.
b) Déterminer ainsi les valeurs propres et vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?

4.6.2

Soit f une fonction continue et intégrable sur $\mathbf{R}$ et $(E) : y' - y = f$
a) Montrer qu'il existe une unique solution de (E) bornée sur $\mathbf{R}$, que l'on notera F.
b) Montrer que F est intégrable sur $\mathbf{R}$.
c) Quelle relation y a-t-il entre $\int_{\mathbf{R}} f$ et $\int_{\mathbf{R}} F$?

4.7 *(Joan Simonet)*

4.7.1

Soit $P(X) = X^5 - 2X^4 - 2X^3 + X^2 + 4X + 4$.
a) Déterminer la factorisation en facteurs irréductibles de P dans $\mathbf{R}[X]$ puis dans $\mathbf{C}[X]$.
b) Pour quels $n \in \mathbf{N}^*$ existe-t-il $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant : $P(M) = 0$; $\operatorname{tr}(M^3) = 0$ et $\text{dét}(M) = \pm 1$?

4.7.2

Soit f une bijection continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que : $\forall x \in \mathbf{R}, f(x+1) = f(x) + n$; et qu'il existe $r > 1$ tel que : $\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) \geqslant r$. Soit E l'ensemble des fonctions g de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continues, croissantes et vérifiant : $\forall x \in \mathbf{R}, g(x+1) = g(x) + 1$.
a) Trouver une fonction simple appartenant à E, que l'on notera g_0.
b) Pour $g \in E$, soit $T(g) : x \mapsto f^{-1}(g(nx))$. Montrer que $T(g) \in E$.
c) Pour $(u, v) \in E \times E$, justifier l'existence de $N(u - v) = \sup\{|u(x) - v(x)|; x \in \mathbf{R}\}$ puis montrer que $N(T(u) - T(v)) \leqslant N(u - v)/r$
d) Une dernière question sur la construction d'un certain type de fonction...

5 Mines-Télécom

5.1 *(Jérémy Cochard)*

5.1.1

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit $d_n = (1! + 2! + \cdots + n!)/n!$
a) Trouvez une relation entre d_n et d_{n+1}.
b) Trouvez une majoration de d_n.
c) En déduire la convergence de d_n.
d) Quel est la nature de la série de terme général $(d_n)/n^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$?

5.1.2

Il y a N coffres et, avec une probabilité p, un trésor à été placé dans l'un de ces coffres. Chaque coffre peut être choisi de façon équiprobable. On a ouvert $N - 1$ coffres sans trouver de trésor. Quelle est la probabilité de trouver un trésor dans le dernier coffre ?

5.2 *(Alexandra Creis)*

5.2.1

Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbf{R}$ et $u_n = \frac{(-1)^n \cos(u_{n-1})}{n}$ pour $n \geqslant 1$. Nature de la série $\sum u_n$?

5.2.2

Pour $(a, b, c) \in \mathbf{C}^3$ et $n \in \mathbf{N}^*$ soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ définie par :
$A_{i,i} = a$; $A_{i,j} = b$ pour $j > i$ et $A_{i,j} = c$ pour $i > j$. Soit J la matrice $n \times n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que $\text{dét}(xJ + A)$ est un polynôme de degré au plus 1. En déduire $\text{dét}(A)$.

5.3 *(Maxime Édouard)*

5.3.1

Soit $A_n = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} n+1 & 3 \\ 1 & n-1 \end{pmatrix}$. Déterminer la limite de A_n^n quand n tend vers l'infini.

5.3.2

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x}$.

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Montrer que f est de classe C^1 sur son domaine de définition et préciser $f'(x)$.

c) Déterminer les limites de f aux bords de son domaine de définition.

5.4 *(Chems-Eddine Hakmi)*

5.4.1

Soit $F(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-\lambda x}}{x}\,\mathrm{d}x$

a) Donner le domaine de définition de F.

b) Montrer que F est de classe C^1 sur son domaine de définition et préciser $F'(x)$.

c) En déduire une expression de $F(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

5.4.2

Déterminer toutes les matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$ symétriques et non diagonalisables.

5.5 *(Aymeric Lacroix)*

5.5.1

Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x' &= \quad y - z \\ y' &= \quad 2x + y + z \\ z' &= -2x - y - z \end{cases}$

5.5.2

Déterminer les fonctions f continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant : $f(x) = 1 - \displaystyle\int_0^x (x+t) f(x-t)\,\mathrm{d}t$.

5.6 *(Antoine Rakotomanga)*

5.6.1

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit $d_n = (1! + 2! + \cdots + n!)/n!$

a) Trouvez une relation entre d_n et d_{n+1}.

b) Trouvez une majoration de d_n.

c) En déduire la convergence de d_n.

d) Quel est la nature de la série de terme général $(d_n)/n^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$?

5.6.2

Soit $\mathscr{P}$ le sous-espace de $\mathbf{R}^4$ d'équations $x + y + z - t = 0$ et $x + y - z - t = 0$.
Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $\mathscr{P}$.

5.7 *(Tom Roitman)*

5.7.1

Pour $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ on pose soit $f(M) = \begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbf{K})$.

b) f est-il diagonalisable ? Quels sont ses éléments propres ?

5.7.2

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x + \mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est définie sur $]-1, +\infty[$.

b) Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1, +\infty[$.

c) Montrer que f possède une limite en $+\infty$ et la déterminer.

5.8 *(Baptiste Ruelle)*

5.8.1

Soit $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & -C^T \\ C & I_n \end{pmatrix}$.

a) Calculer $M^T M$. En déduire que M est inversible

b) Montrer que $M^{-1}M^T$ est orthogonale.

5.8.2

a) Dans une urne contenant n tickets dont p gagnants, un joueur tire avec remise p tickets.
   i) Calculer la probabilité $P(n, p)$ pour que le joueur tire au moins un ticket gagnant.
   ii) On suppose $p = \sqrt{n}$. Calculer la limite lorsque p tend vers l'infini de $P(p^2, p)$.

b) Reprendre les questions précédentes lorsque le joueur tire p tickets sans remise.
(Pour le calcul de la limite, on donnait la formule de Stirling.)

5.9 *(Tanguy Vanlerenberghe)*

5.9.1

On donnait une matrice A de taille 3×3.

a) Diagonaliser A.
(les valeurs propres étaient 0,1,2 et les vecteurs propres (1,1,1),(3,1,1), (1,1,2) ou (2,1,1))

b) Résoudre $X' = AX$

5.9.2

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.

a) Montrer que $Z = X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$

b) Donner la loi conditionnelle de X sachant $Z = n$

6 ENSEA

6.1 *(Antoine Rakotomanga)*

6.1.1

Soit $a \in \mathbf{R}$ et, pour $P \in \mathbf{R}[X]$, $N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|\,\mathrm{d}t$. Montrer que N_a est une norme sur $\mathbf{R}[X]$.

6.1.2

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$, telles que $P(X = i, Y = j) = \frac{1}{2^{i+1}\mathrm{e}\, j!}$.

a) Déterminer la loi de X et celle de Y. X et Y sont-elles indépendantes ?

b) Calculer l'espérance et la variance de X et de Y.

c) Calculer $P(X = Y)$.

7 Navale

7.1 *(Alban Chalengeas)*

7.1.1

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

a) Déterminer le domaine de définition D de F.

b) Montrer que F est de classe C^1 sur D, calculer $F'(x)$, en déduire $F(x)$.

7.1.2

On dispose d'une urne avec r boules blanches et $N - r$ boules noires...

7.2 *(Brieuc Grisard)*

7.2.1

a) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(\sin(t))}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(\sin(n))}{n}$ sont elles de même nature ?!?!?

b) Convergence de la série et encadrement de la limite avec des sommes partielles.

7.2.2

Résoudre $M^5 + M + I_3 = A$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

8 Saint-Cyr

8.1 *(Alban Chalengeas)*

8.1.1

Montrer que la transposition est un endomorphisme diagonalisable.
En déduire que les ensembles des matrices symétriques et antisymétriques sont supplémentaires.

8.1.2

Soit $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$ et $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$.

1. Montrer que I est bien définie.
2. Déterminer le rayon de convergence R de S.
3. Montrer que $S(x) = \ln(1+x)$ sur $]-R, R[$.
4. Montrer qu'il y a convergence absolue sur $[0,1[$.
5. Écrire un programme Python prenant p en argument et retournant une valeur approchée de $\ln(2)$ avec p décimales.
6. Montrer que : $\left| I - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \right| < \frac{1}{n^2}$.
7. En admettant que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer que $I = \frac{\pi^2}{12}$.

9 ENS Paris-Saclay

9.1 *(Clément Dureuil)*

1. Question "de cours" : montrer qu'une application lipschitzienne de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est continue. La réciproque est-elle exacte ?
2. On pose $f(x,y) = \dfrac{x\sin(y) - y\sin(x)}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$; et $f(0,0) = 0$.
   (a) f est-elle continue sur $\mathbf{R}^2$?
   (b) Calculer les dérivées partielles de f en dehors de l'origine
   (c) f admet-elle des dérivées partielles en l'origine ? Si oui calculer les.
   (d) f est-elle de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$?

3. On dit qu'une matrice est positive lorsque tous ses coefficients sont positifs.
   Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que :
   $[\forall V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}),\ AV \text{positif} \implies V \text{positif}] \iff [A \in GL_n(\mathbf{R}) \text{ et } A^{-1} \text{ est positive}]$