Chapitre 05
Normes sur un espace vectoriel – Résumé de cours

Définition 1

Une norme sur un espace vectoriel E est une application $N : E \to \mathbb{R}_+$vérifiant :

(i) $N(x) = 0 \iff x = 0_E$ (séparation)

(ii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda \cdot x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité)

(iii) $\forall (x, y) \in E \times E, N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire)

On dit alors que (E, N) est un espace vectoriel normé. La **distance** associée à la norme N est $d(x, y) = N(x - y)$.

Définition 2

Soit (E, N) un espace vectoriel normé.

1. La boule ouverte de centre x_0 et de rayon R, noté $B_o(x_0, R)$ ou $B(x_0, R)$ est l'ensemble $\{x \in E,\ N(x - x_0) < R\}$.
2. La boule fermée de centre x_0 et de rayon R, noté $B_f(x_0, R)$ ou $\overline{B(x_0, R)}$ est l'ensemble $\{x \in E,\ N(x - x_0) \leqslant R\}$.
3. La sphère de centre x_0 et de rayon R, noté $S(x_0, R)$ est l'ensemble $\{x \in E,\ N(x - x_0) = R\}$.

Définition 3

Soit (E, N) un espace vectoriel normé.

1. Une partie A de E est dite **bornée** s'il existe $M > 0$ tel que : $\forall x \in A,\ N(x) \leqslant M$.
2. Une partie A de E est dite **convexe** si pour tous x et y dans A, le segment $[x, y]$ est dans A, où $[x, y] = \{(1 - t)x + ty,\ t \in [0, 1]\}$.
3. Une suite d'éléments de E, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite bornée s'il existe $M > 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ N(x_n) \leqslant M$.
4. Une fonction $f : X \to E$ est dite bornée s'il existe $M > 0$ tel que : $\forall x \in X,\ N(f(x)) \leqslant M$.

Remarque 4

Une boule est toujours bornée, convexe et symétrique par rapport à son centre.

Exemple 5

1. Norme associée à un produit scalaire dans un espace préhilbertien réel.

2. Normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Norme $\|\cdot\|_\infty$ sur un espace de fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$.
4. Normes sur des espaces de polynômes.

Définition 6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, N une norme sur E, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite convergente **pour** N s'il existe $\ell \in E$ tel que $N(x_n - \ell) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On dit que ℓ est la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour la norme N.

Proposition 7

1. Il y a unicité de la limite.
2. Toute suite convergente est bornée.
3. La limite d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des limites.
4. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.

Définition 8

Deux normes N_1 et N_2 sont dites équivalentes s'il existe deux réels α et β tels que :

$$\forall x \in E, N_1(x) \leqslant \alpha N_2(x) \text{ et } N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$$

Proposition 9

Si deux normes sont équivalentes, toute suite bornée pour l'une l'est aussi pour l'autre, et toute suite convergente pour l'une converge pour l'autre vers la même limite.

Remarque 10

Ceci donne une manière de montrer que deux normes **ne sont pas équivalentes** : il suffit de trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui soit bornée pour une norme et pas pour l'autre, ou bien qui tende vers 0 pour une norme, mais pas pour l'autre.

Proposition 11

Dans un espace vectoriel **de dimension finie**, toutes les normes sont équivalentes.