# Corrigé de l'épreuve CCMP Maths II PSI

## 1 Une propriété sur les sommes de Riemann

1. Au programme de toutes les classes de première année, il y a le résultat suivant, démontré seulement pour les fonctions de classe $C^1$ :

   **Théorème :** *pour $f$ continue sur le segment $[a,b]$,* $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \overset{n\to\infty}{\to} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$

   $g$ étant continue et intégrable sur $]a,b[$, on applique ce théorème à $f$ :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t,$$

   puis on constate que

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} g\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) - \frac{1}{n}f(a)\\ &\overset{n\to\infty}{\to} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - 0\\ &= \int_a^b g(t)\mathrm{d}t\end{aligned},$$

   ce qui prouve bien que $g \in \mathcal{D}_{a,b}$.

2. 
   - Pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}a_k - b_{k+1} &= \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{2^{k+2}}\\ &= \frac{1}{k(k+1)}\left(1-\frac{k(k+1)}{2^{k+2}}\right)\end{aligned},$$

     et $\dfrac{k(k+1)}{2^{k+2}} \to 0$ quand $k\to\infty$ par croissance comparée : il existe $k_0$ tel que $\dfrac{k(k+1)}{2^{k+2}} < 1$ pour tout $k \geq k_0$. Il semble même que $k_0 = 1$ convienne.
   - On prend ici $k_0 = 2$.

     Les intervalles $[a_k, b_k]$, $k \geq 2$, chacun centré en $\dfrac{1}{k}$, forment une suite d'intervalles deux à deux disjoints de l'intervalle $]0,1[$, donc tout réel $t \in ]0,1[$ appartient à au plus un de ces intervalles, sur chacun desquels $f$ est bien définie (raccord de valeur $k^2$ en $t = \dfrac{1}{k}$). Donc $f$ est bien définie sur $]0,1[$.
   - $f$ est une fonction affine par morceaux, donc continue, sauf peut-être en les réels $a_k$ et $b_k$.
     Or, $\forall k \geq 2$, $f(a_k) = 0 = \lim\limits_{t\to 0^-} f(t)$ et $f(b_k) = 0 = \lim\limits_{t\to 0^+} f(t)$.
     Donc $f$ est continue sur $]0,1[$.
   - $f$ est prolongeable par continuité en 1 (valeur 0), donc pour tout $x \in ]0,1[$, $\displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge.

     Ensuite, $f$ est à valeurs positives, donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$ est décroissante sur $]0,1[$.

     Enfin, puisque $a_k \to 0$ quand $k\to\infty$, pour tout $x \in ]0,1[$, il existe un entier $p$ tel $a_p \leq x$, et

$$\begin{aligned}\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t &\leq \int_{a_p}^1 f(t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=p}^{2} \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \text{ puisque cette série converge.}\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand $x \to 0$, ce qui prouve que $f$ est intégrable sur $[0,1]$.

- $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \geq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = n \to +\infty$ quand $n \to \infty$.

  Ainsi $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ n'admet pas de limite finie, et $f$ n'appartient pas à $\mathcal{D}_{a,b}$.

3. $\phi$ est définie et continue sur $]0,1]$, et, pour tout $x \in ]0,1]$,

$$\int_x^1 \phi(t)\mathrm{d}t = [2\sqrt{t}]_x^1 = 2(1-\sqrt{x}) \to 2 \text{ quand } x \to 0.$$

Donc $\phi$ est bien intégrable sur $]0,1[$.
Pour montrer que $\phi$ appartient à $\mathcal{D}_{0,1}$, on montre le résultat suivant, que l'on utilisera aussi dans la question suivante :

**Théorème :** *toute fonction $f$ continue, intégrable, monotone et à valeurs positives sur l'intervalle $]a,b[$ appartient à $\mathcal{D}_{a,b}$.*

On fait la démonstration dans le cas où $f$ est décroissante.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Par un principe classique de comparaison d'aires, pour tout entier $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\int_{a+k\frac{b-a}{n}}^{a+(k+1)\frac{b-a}{n}} f(t)\mathrm{d}t \leq \frac{b-a}{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \leq \int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} f(t)\mathrm{d}t.$$

En sommant pour $k = 1 \dots n-1$, il vient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_{a+k\frac{b-a}{n}}^{a+(k+1)\frac{b-a}{n}} f(t)\mathrm{d}t \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} f(t)\mathrm{d}t,$$

soit encore :

$$\frac{1}{b-a}\int_{a+\frac{b-a}{n}}^{b} f(t)\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^{b-\frac{b-a}{n}} f(t)\mathrm{d}t.$$

Quand $n \to \infty$, et puisque $f$ est intégrable sur $)a,b[$, les membres de gauche et de droite de cette double inégalité tendent tous les deux vers $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, et donc, par encadrement, $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \to \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ quand $n \to \infty$.
Finalement, $f \in \mathcal{D}_{a,b}$.

On applique alors ce théorème à la fonction $\phi$, qui est continue, intégrable, décroissante et à valeurs positives sur $]0,1[$, et appartient donc à $\mathcal{D}_{0,1}$.

4. $\widetilde{h}$ est dérivable et pour tout $t \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, $\widetilde{h}'(t) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{[t(1-t)]^{\frac{3}{2}}} \times (1-2t) \leq 0$ : $\widetilde{h}$ est décroissante.

Ensuite, $\widetilde{h}$ est continue, à valeurs positives, et $\widetilde{h}(t) \sim \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ quand $t \to 0$. Par comparaison, on en déduit que $\widetilde{h}$ est intégrable sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$.

Enfin, $\widetilde{h} \in \mathcal{D}_{0,\frac{1}{2}}$ par le théorème démontré à la question précédente.

5. $h$ est intégrable sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$, et le changement de variable $u = 1-t$, $C^1$ et strictement décroissant, transforme $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\mathrm{d}t$ en $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 h(t)\mathrm{d}t$. Ces deux intégrales sont donc de même nature, convergentes, et finalement, $h$ est intégrable sur $]0,1[$.

   De plus, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2}}^1 h(t)\mathrm{d}t$, et

$$\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \widetilde{h}(t)\mathrm{d}t.$$

6. Puisque $\widetilde{h} \in \mathcal{D}_{0,\frac{1}{2}}$ :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} h\left(\frac{k}{2n}\right) \to 2\int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 h(t)\mathrm{d}t \text{ quand } n \to \infty.$$

   Or, puisque $h(1-t) = h(t)$ pour tout $t \in ]0,1[$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} h\left(\frac{k}{2n}\right) &= \sum_{k=1}^{n-1} h\left(1 - \frac{k}{2n}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} h\left(\frac{2n-k}{2n}\right) \\
&= \sum_{k=2n-1}^{n+1} h\left(\frac{k}{2n}\right) \text{ par le changement d'indice } 2n-k \leftarrow k \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{2n-1} h\left(\frac{k}{2n}\right) - h\left(\frac{1}{2}\right)\right]
\end{aligned}.$$

   Donc $\displaystyle\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n-1} h\left(\frac{2n-k}{2n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} h\left(\frac{k}{2n}\right) + \mathrm{o}(1) \to \int_0^1 h(t)\mathrm{d}t$ quand $n \to \infty$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $h$ est décroissante sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$, et que $\dfrac{k}{2n} \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right]$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$h\left(\frac{k}{2n}\right) \leq h\left(\frac{k}{2n+1}\right) \leq h\left(\frac{k}{2(n+1)}\right) \quad \forall k = 1\ldots n,$$

   et donc

$$\frac{2n}{2n+1}.\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{2n}\right) \leq \frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) \leq \frac{2(n+1)}{2n+1}.\frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{2(n+1)}\right).$$

   Or $\displaystyle\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{2n}\right) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1} h\left(\frac{k}{2n}\right) + \frac{1}{2n}h\left(\frac{1}{2}\right) \to \int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\mathrm{d}t$ quand $n \to \infty$, et $\displaystyle\frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{2(n+1)}\right) \to \int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\mathrm{d}t$.

   Donc par encadrement, $\displaystyle\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) \to \int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\mathrm{d}t$ quand $n \to \infty$.

   Enfin,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) &= \frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) + \frac{1}{2n+1}\sum_{k=n+1}^{2n} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) \\
&= \frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) + \frac{1}{2n+1}\sum_{k=n+1}^{2n} h\left(\frac{2n-(k-1)}{2n+1}\right) \\
&= \frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) + \frac{1}{2n+1}\sum_{k=n}^{1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) \\
&= 2.\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) \\
&\to 2\int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 h(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}.$$

8. Si on note $S_p = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1} h\left(\frac{k}{p}\right)$, le résultat de la question 6 prouve que la suite $(S_{2n})_n$ est convergente de limite $\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t$, et celui de la question 7 que la suite $(S_{2n+1})_n$ est convergente de limite $\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t$.
   Un résultat de cours permet de conclure que la suite $(S_p)_p$ est convergente de limite $\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t$, c'est-à-dire, compte tenu de la continuité de $h$ et de son intégrabilité obtenue à la question 5, que $h \in \mathcal{D}_{0,1}$.
9. On effectue dans l'intégrale convergente $\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t$ le changement de variable strictement croissant $u = \sqrt{t}$, soit $t = u^2$.
   Puisque $\mathrm{d}t = 2u\mathrm{d}u$, $\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = 2\left[\arcsin(u)\right]_0^1 = \pi$.
10. D'après la question 3, la fonction $\phi$ appartient à $\mathcal{D}_{0,1}$. Donc :
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}} \to \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \text{ quand } n \to \infty,$$
   ce qui s'écrit encore :
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}} \to 2.$$
   On en conclut que $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}$, puis, compte-tenu du fait que $\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n}$, que :
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}.$$
11. Puisque cette fois $h \in \mathcal{D}_{0,1}$,
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}} \to \int_0^1 h(t)\mathrm{d}t \text{ quand } n \to \infty,$$
   alors :
$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \to \pi.$$
12. Soit $\epsilon$ un réel strictement positif. Puisque $\epsilon_n \to 0$ quand $n \to \infty$, il existe un entier naturel non nul $n_0$ tel que :
$$\forall n \geq n_0, \quad |\epsilon_n| < \epsilon.$$

Pour tout $n > n_0$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{|\epsilon_k|}{\sqrt{k(n-k)}} &= \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{|\epsilon_k|}{\sqrt{k(n-k)}} + \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{|\epsilon_k|}{\sqrt{k(n-k)}} \\ &\leq \max(|\epsilon_1|, \ldots, |\epsilon_{n_0-1}|) \times \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} + \epsilon \times \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \\ &\leq \max(|\epsilon_1|, \ldots, |\epsilon_{n_0-1}|) \times \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{1}{\sqrt{n-n_0+1}} + \epsilon \times \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}\end{aligned}.$$

Comme la suite $\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}\right)_n$ est convergente, elle est bornée, donc il existe un réel $M$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leq M$.

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{|\epsilon_k|}{\sqrt{k(n-k)}} \leq \max(|\epsilon_1|, \ldots, |\epsilon_{n_0-1}|) \times \frac{n_0-1}{\sqrt{n-n_0+1}} + M\epsilon \ .$$

Le premier terme tendant vers 0 lorsque $n \to \infty$, il existe un entier naturel non nul $n_1$ tel que :

$$\forall n \geq n_1, \quad \max(|\epsilon_1|, \ldots, |\epsilon_{n_0-1}|) \times \frac{n_0-1}{\sqrt{n-n_0+1}} < \epsilon.$$

Ainsi, pour tout $n \geq \max(n_0, n_1)$, $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{|\epsilon_k|}{\sqrt{k(n-k)}} < (M+1)\epsilon$.

Cela prouve que $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{|\epsilon_k|}{\sqrt{k(n-k)}} \to 0$ quand $n \to \infty$.

13. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier $i$ compris entre 1 et $n-1$,

$$\frac{(1+\epsilon_i)(1+\epsilon_{n-i})}{1+\epsilon_n} - 1 = \frac{\epsilon_i}{1+\epsilon_n} + \frac{\epsilon_{n-i}}{1+\epsilon_n} + \frac{\epsilon_i \epsilon_{n-i}}{1+\epsilon_n} - \frac{\epsilon_n}{1+\epsilon_n}.$$

Puisque $\epsilon_n \to 0$, il existe $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tel, pour tout $n \geq n_2$, $1 + \epsilon_n \geq \frac{1}{2}$.

Donc $\left|\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \frac{\epsilon_i}{1+\epsilon_n}\right| \leq 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\epsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} \to 0$ quand $n \to \infty$.

De la même façon, et puisque le changement d'indice $i \leftarrow n-i$ laisse inchangé $i(n-i)$, $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \frac{\epsilon_{n-i}}{1+\epsilon_n} \to 0$.

La suite $(\epsilon_k)_k$ étant bornée, on majore dans le troisième terme $|\epsilon_i \epsilon_{n-i}|$ par $m \times |\epsilon_i|$, et on en déduit que $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \frac{\epsilon_i \epsilon_{n-i}}{1+\epsilon_n} \to 0$.

Enfin, $\left|\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \frac{\epsilon_n}{1+\epsilon_n}\right| \leq 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \times |\epsilon_n| \to 0$.

# 2 Une étude de marche aléatoire

14. Pour tout entier naturel $n$, la variable aléatoire $\frac{1+X_n}{2}$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$. Elle suit donc une loi de Bernoulli.
La probabilité que $\frac{1+X_n}{2}$ vaille 1 est la probabilité que $X_n$ égale 1, soit $\frac{1}{2}$.

15. Pour tout $i = 1 \dots n$, $A_i$ est l'évènement "le $2i$-uplet $(X_1, \dots, X_{2i})$ comporte le même nombre de $-1$ que de 1".
Or il y a $\binom{2i}{i}$ $2i$-uplets de $-1$ et de 1 comportant autant de $-1$ que de 1, et pour chacun de ces $2i$-uplets, la probabilité que $(X_1, \dots, X_{2i})$ lui soit égal vaut $\left(\frac{1}{2}\right)^{2i}$.
Finalement, $\mathbb{P}(A_i) = \binom{2i}{i} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2i}$.
16. Notons $Y_n$ la variable aléatoire égale à $\mathrm{Card}\{i \in [\![1, n]\!] \mid X_i = 1\}$, et $Z_n$ la variable aléatoire égale à $\mathrm{Card}\{i \in [\![1, n]\!] \mid X_i = -1\}$.
Alors $Y_n + Z_n = n$ et $S_n = Y_n - Z_n$.
Ainsi $n - S_n = 2Z_n$ est à valeurs dans $2\,\mathbb{N}$.
On en déduit que, si $l - n$ est impair, $(S_n = l)$ est l'évènement impossible, et $\mathbb{P}(S_n = l) = 0$.
Lorsque $l = n - 2p$, où $p$ est un entier naturel, l'évènement $(S_n = l)$ est l'évènement $(Y_n = n - p)$, de probabilité $\binom{n}{n-p} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{n}{p} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{n}{\frac{n+l}{2}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
17. Le fait que la série $\sum_n d_n$ diverge est un résultat de cours.
Ensuite, $c_n \sim d_n$ équivaut à $d_n - c_n = \mathrm{o}(c_n)$. Comme la série $\sum_n c_n$ est à termes positifs et divergente, le théorème admis dans l'énoncé permet d'écrire que :
$$\sum_{k=1}^{n}(d_k - c_k) = \mathrm{o}(\sum_{k=1}^{n} c_k),$$
ce qui prouve que
$$\sum_{k=1}^{n} c_k \sim \sum_{k=1}^{n} d_k \text{ quand } n \to \infty.$$
18. $N_n$ est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. C'est donc une variable aléatoire finie, qui possède nécessairement une espérance.
Pour le calcul de $\mathbb{E}(N_n)$, on note $\chi_{A_i}$ la variable aléatoire qui vaut 1 si l'évènement $A_i$ est réalisé, et 0 sinon.
On remarque alors que $N_n = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}$, et on en déduit que
$$\mathbb{E}(N_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\chi_{A_i}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \binom{2i}{i} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2i}.$$
19. On utilise la formule de Stirling rappelée dans le préambule, puis la question 17.
Déjà, $\binom{2i}{i} = \frac{(2i)!}{(i!)^2} \sim \frac{2\sqrt{i\pi}\,\left(\frac{2i}{e}\right)^{2i}}{2i\pi\,\left(\frac{i}{e}\right)^{2i}} = \frac{2^{2i}}{\sqrt{i\pi}}$.
Ainsi, $\binom{2i}{i} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} \sim \frac{2^{2i}}{\sqrt{i\pi}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} = \frac{1}{\sqrt{i\pi}}$.
La série $\sum_i \sum_{i=1}^{n} \binom{2i}{i} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2i}$ est bien divergente, par comparaison avec la série de Riemann d'exposant $\frac{1}{2}$, et sa somme partielle d'indice $n$, à savoir $\mathbb{E}(N_n)$ est équivalente à $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}$.
La question 10 permet alors d'assurer que
$$\mathbb{E}(N_n) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}.$$

20. L'urne contenant au départ autant de boules blanches que de boules noires, un indice d'égalité est nécessairement pair.
Comme à la question 18, on utilise les fonctions indicatrices des évènements $B_i$ : $\chi_{B_i}$ vaut 1 si $i$ est un indice d'égalité, 0 sinon. En particulier, $\chi_{B_{2j+1}} = 0$ pour tout entier $j$. On remarque alors que $M_n = \sum_{i=1}^{2n} \chi_{B_i} = \sum_{j=1}^{n} \chi_{B_{2j}}$.
On en déduit que $\mathbb{E}(M_n) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(B_{2j})$.
Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on calcule $\mathbb{P}(B_{2j})$ par dénombrement :
   - un tirage est en général un $2n$-uplet de blanc et de noir, comportant $n$ boules blanches : il y a $\binom{2n}{n}$ possibilités de placer les boules blanches, et donc le cardinal de tous les résultats possibles est $\binom{2n}{n}$.
   - un tirage favorable est en particulier un tirage dont les $2j$ derniers éléments sont constitués de $j$ boules blanches et de $j$ boules noires. Il y a $\binom{2j}{j}$ possibilités de placer les boules blanches ...
   - un tirage favorable est aussi un tirage dont les $2(n-j)$ premiers éléments sont constitués de $jn - j$ boules blanches et de $n - j$ boules noires. Il y a $\binom{2(n-j)}{n-j}$ possibilités de placer les boules blanches.

   Finalement, $\mathbb{P}(B_j) = \frac{\binom{2j}{j}\binom{2(n-j)}{n-j}}{\binom{2n}{n}}$, et

$$\mathbb{E}(M_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\binom{2j}{j}\binom{2(n-j)}{n-j}}{\binom{2n}{n}} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\binom{2j}{j}\binom{2(n-j)}{n-j}}{\binom{2n}{n}}.$$

21. On utilise encore Stirling : on rappelle que l'on a démontré à la question 19 que $\binom{2j}{j} \sim \frac{2^{2j}}{\sqrt{j\pi}}$ quand $j \to \infty$. Donc il existe une suite $(\epsilon_j)_j$ de réels, convergente de limite nulle, telle que :

$$\binom{2j}{j} = \frac{2^{2j}}{\sqrt{j\pi}}(1 + \epsilon_j).$$

   On remplace alors dans l'expression de $\mathbb{E}(M_n)$ obtenue à la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_n) &= 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\binom{2j}{j}\binom{2(n-j)}{n-j}}{\binom{2n}{n}} \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\frac{2^{2j}}{\sqrt{j\pi}}(1+\epsilon_j)\frac{2^{2(n-j)}}{\sqrt{(n-j)\pi}}(1+\epsilon_{n-j})}{\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}(1+\epsilon_n)} \quad . \\ &= 1 + \sqrt{\frac{n}{\pi}}.\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{j(n-j)}}.\frac{(1+\epsilon_j)(1+\epsilon_{n-j})}{1+\epsilon_n}\end{aligned}$$

   Pour simplifier, notons $\Delta_n = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{j(n-j)}}.\frac{(1+\epsilon_j)(1+\epsilon_{n-j})}{1+\epsilon_n}$ et $\Sigma_n = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{j(n-j)}}$.
   Alors $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{E}(M_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\Delta_n - \Sigma_n) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Sigma_n \to 0 + 0 + \sqrt{\pi}$ d'après les questions 13 et 11, et

$$\mathbb{E}(M_n) \sim \sqrt{\pi n} \text{ quand } n \to \infty.$$

---

OUF !