TD 06
Probabilités

Exercice 1. *Loi des événements rares – théorème de Poisson*. On considère $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de lois $\mathcal{B}(n, p_n)$. On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$.
Démontrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{P}(\lambda)$, c'est-à-dire que pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(S_n = k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

Correction

Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $n \geqslant k$ (sinon $\mathbb{P}(S_n = k) = 0$). Alors

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} p_n^k \mathrm{e}^{(n-k)\ln(1-p_n)}.$$

Ensuite, faisons de l'asymptotique **proprement.**

- Déjà, $n(n-1)\dots(n-k+1)$ est un produit **fini** de k termes (le nombre de termes du produit est indépendant de n) donc $n(n-1)\dots(n-k+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^k$. Ainsi, $n(n-1)\dots(n-k+1)p_n^k \underset{n\to\infty}{\sim} (np_n)^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda^k$.
- Ensuite, $(n-k)\ln(1-p_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(1-p_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -np_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\lambda$.

Ainsi, par continuité de l'exponentielle, on en déduit que

$$\mathbb{P}(S_n = k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},$$

d'où la convergence en loi de (S_n) vers la loi de Poisson.

Exercice 2. *La loi géométrique est sans mémoire*. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On dit que X est sans mémoire si pour tous j, k entiers naturels, $\mathbb{P}_{X>j}(X > j+k) = \mathbb{P}(X > k)$.

1. Démontrer que si X suit une loi géométrique, alors X est sans mémoire.

Correction

Supposons que X suive une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Soient j, k des entiers. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{X>j}(X > j+k) &= \frac{\mathbb{P}(X > j, X > j+k)}{\mathbb{P}(X > j)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(X > j+k)}{\mathbb{P}(X > j)} \text{ car } \{X > j+k\} \subset \{X > j\}\\ &= \frac{q^{j+k}}{q^j} = q^k = \mathbb{P}(X > k).\end{aligned}$$

Donc X est sans mémoire.

2. Démontrer que, réciproquement, si X est sans mémoire, X suit une loi géométrique de paramètre $p = \mathbb{P}(X = 1)$.

Correction

Si X est sans mémoire, notons $p = \mathbb{P}(X = 1)$ et, par conséquent, $q = 1 - p = \mathbb{P}(X > 1)$. Alors pour tout k dans $\mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k - 1) - \mathbb{P}(X > k).$$

Or, $\mathbb{P}_{X>k-1}(X > k) = \mathbb{P}(X > 1) = q$, donc $\mathbb{P}(X > k) = q\mathbb{P}(X > k - 1)$. Par récurrence immédiate, il vient donc : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X > k) = q^k$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k - 1) - \mathbb{P}(X > k) = q^{k-1} - q^k = q^{k-1}(1 - q) = pq^{k-1}.$$

Ainsi, $X \sim \mathscr{G}(p)$.

Exercice 3. *Formule de Wald*. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires iid à valeurs dans $\mathbb{N}$, N une variable aléatoire indépendante des $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et, $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i$: cela signifie que pour tout ω de Ω, $S(\omega) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$.

1. Justifier que S est bien une variable aléatoire discrète.
2. On suppose que X_1 et N admettent une espérance. Démontrer que S admet une espérance et que $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1)$.

Correction

 nlaillet.math@gmail.com

Calculons, en admettant que la somme $\sum_{k\in\mathbb{N}} k\mathbb{P}(S=k)$ soit potentiellement égale à $+\infty$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{N}} k\mathbb{P}(S=k) &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} k\mathbb{P}(S=k, N=n)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} k\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i = k, N=n)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} k\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i = k)\mathbb{P}(N=n) \text{ par indépendance}\\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}} k\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i = k)\mathbb{P}(N=n) \text{ car on somme une famille de termes positifs}\\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(N=n)\sum_{k\in\mathbb{N}} k\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i = k)\\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(N=n)\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(N=n)n\mathbb{E}\left(X_1\right) \text{ car les } X_i \text{ suivent la même loi}\\
&= \mathbb{E}\left(X_1\right)\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(N=n)n\\
&= \mathbb{E}\left(X_1\right)\mathbb{E}(N).
\end{aligned}$$

La somme $\sum_{k\in\mathbb{N}} k\mathbb{P}(S=k)$ est donc finie, donc S admet une espérance, égale à $\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(N)$.

3. On suppose que X_1 est centrée et admet une variance. Démontrer que S admet une variance et que $\mathbb{V}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{V}(X_1)$.

Correction

Comme X_1 est centrée, S aussi, donc, si elle existe, $\mathbb{V}(S) = \mathbb{E}(S^2)$. On calcule donc, ar la formule de transfert,

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{N}} k^2\mathbb{P}(S=k) &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} k^2\mathbb{P}(S=k, N=n)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} k^2\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i = k^2, N=n)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} k^2\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i = k^2)\mathbb{P}(N=n) \text{ par indépendance}\\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}} k^2\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i = k^2)\mathbb{P}(N=n) \text{ car on somme une famille de termes positifs}\\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(N=n)\sum_{k\in\mathbb{N}} k^2\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i = k^2)\\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(N=n)\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right).
\end{aligned}$$

Or,

$$\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right) = \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right),$$

car $\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = 0$ (les variables sont centrées). Or, par indépendance, $\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) = n\mathbb{V}(X_1)$. Ainsi,

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} k^2\mathbb{P}(S=k) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(N=n)n\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{E}(N)\mathbb{V}(X_1).$$

La série de terme général $k^2\mathbb{P}(S=k)$ converge donc. Ainsi, S possède une variance, égale à $\mathbb{E}(N)\mathbb{V}(X_1)$.

Exercice 4. *Lemmes de Borel-Cantelli et applications*. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. On considère l'événement : $\mathrm{A} = \bigcap_{k=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \mathrm{A}_n\right)$.

1. Traduire avec des mots en français l'événement A.

Correction

L'événement A signifie qu'une **infinité de A_n ont lieu.**

2. On suppose que la série de terme général $\mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$ converge. En se rappelant que la probabilité d'une réunion est inférieure à la somme des probabilités, déterminer $\mathbb{P}(A)$.

Correction

On remarque que
$$\mathbb{P}(A) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \mathrm{A}_n\right).$$
Or,
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \mathrm{A}_n\right) \leqslant \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$
Or, $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. Donc $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc, par encadrement, $\boxed{\mathbb{P}(A) = 0}$.

3. On suppose maintenant que les A_n sont mutuellement indépendants et que la série de terme général $\mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$ diverge. En étudiant $\mathbb{P}(\overline{A})$, et en remarquant que $1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x}$, déterminer $\mathbb{P}(A)$.

Correction

On remarque que
$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty}\left(\bigcap_{n=k}^{+\infty}\overline{A_n}\right)\right).$$
Or,
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty}\left(\bigcap_{n=k}^{+\infty}\overline{A_n}\right)\right) = \lim_{k\to+\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{+\infty}\overline{A_n}\right).$$
Finalement, pour $N \geqslant k$,
$$\begin{aligned}0 \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{K}\overline{A_n}\right) &= \prod_{n=k}^{K}\mathbb{P}(\overline{A_n})\\ &= \prod_{n=k}^{K}(1-\mathbb{P}(A_n))\\ &\leqslant \prod_{n=k}^{K}\mathrm{e}^{-\mathbb{P}(A_n)}\\ &\leqslant \mathrm{e}^{-\sum_{n=k}^{K}\mathbb{P}(A_n)}\end{aligned}$$
Or, par divergence de la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$, $\displaystyle\sum_{n=k}^{K}\mathbb{P}(A_n) \underset{K\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{K}\overline{A_n}\right) \underset{K\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Donc $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{n=k}^{+\infty}\overline{A_n}\right) = 0$ donc $\mathbb{P}(\overline{A}) = 0$.

Finalement, $\boxed{\mathbb{P}(A) = 1.}$

4. **Application.** On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ iid vérifiant $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_1 = -1) = 1 - p$. On note $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$. Déterminer $\mathbb{P}(S_n = 0)$ et démontrer que si $p \neq \dfrac{1}{2}$, alors S_n est infiniment souvent égale à 0.

Correction

On pose $A_n = \{S_n = 0\}$. On a clairement $\mathbb{P}(A_{2n+1}) = 0$ et $\mathbb{P}(A_{2n}) = \binom{2n}{n} p^n(1-p)^n$.
Or, d'après l'équivalent de Stirling,

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}.$$

Donc, si $p \neq \frac{1}{2}, p(1-p) < \frac{1}{4}$ donc $\sum \mathbb{P}(A_{2n})$ converge. D'où le résultat d'après Borel-Cantelli.

Exercice 5. *CCINP 2019*. Soit $(\mathrm{A}_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une famille finie d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathrm{T}, \mathbb{P})$. Montrer :

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{A}_n) \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{A}_1) + \cdots + \mathbb{P}(\mathrm{A}_n) \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{A}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{A}_n) + n - 1.$$

Exercice 6. *Mines-Télécom 24*. Soit X suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On considère les évènements A : « X est un entier pair » ; et B : « X est un multiple de 3 » Calculer $P(A)$ et $P(B)$. Ces deux évènements sont-ils indépendants ?

Correction

On note $q = 1-p$. On calcule

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \sum_{k\geqslant 1} \mathbb{P}(X = 2k) \\
&= \sum_{k\geqslant 1} pq^{2k-1} \\
&= \frac{p}{q}\sum_{k\geqslant 1} (q^2)^k \\
&= \frac{p}{q} q^2 \frac{1}{1-q^2} \\
&= \frac{pq}{1-q^2} \\
&= \frac{pq}{(1-q)(1+q)} \\
&= \frac{q}{1+q}.
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \sum_{k\geqslant 1} \mathbb{P}(X = 3k) \\
&= \sum_{k\geqslant 1} pq^{3k-1} \\
&= \frac{p}{q}\sum_{k\geqslant 1} (q^3)^k \\
&= \frac{p}{q} q^3 \frac{1}{1-q^3} = \frac{pq^2}{1-q^3}.
\end{aligned}$$

 nlaillet.math@gmail.com

Ensuite,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A\cap B) &= \mathbb{P}(\text{« } X \text{ est multiple de 6 »})\\
&= \sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}(X=6k)\\
&= \sum_{k\geqslant 1} pq^{6k-1}\\
&= \frac{p}{q}\sum_{k\geqslant 1}(q^6)^k\\
&= \frac{p}{q}q^6\frac{1}{1-q^6} = \frac{pq^5}{1-q^6}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{pq^3}{(1+q)(1-q^3)}.$$

On a donc l'équivalence

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) &\Leftrightarrow \frac{pq^5}{1-q^6} = \frac{pq^3}{(1+q)(1-q^3)}\\
&\Leftrightarrow \frac{q^2}{(1-q^3)(1+q^3)} = \frac{1}{(1+q)(1-q^3)}\\
&\Leftrightarrow \frac{q^2}{1+q^3} = \frac{1}{1+q}\\
&\Leftrightarrow q^2 = \frac{1+q^3}{1+q} = 1-q+q^2\\
&\Leftrightarrow 0 = 1-q,
\end{aligned}$$

ce qui est faux car $p\in]0,1[$. Donc on n'a pas d'indépendance de ces deux événements.

Exercice 7. *Mines-Télécom 24*. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que : $\forall k\in\mathbb{N}, P(X=k)=P(Y=k)=\dfrac{1+a^k}{4k!}$.

1. Déterminer la valeur de a.

Correction

On sait que l'on doit avoir $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X=k)=1$. Or,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X=k) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1+a^k}{4k!}\\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}+\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a^k}{k!}\\ &= \frac{\mathrm{e}+\mathrm{e}^a}{4}.\end{aligned}$$

Donc $\frac{\mathrm{e}+\mathrm{e}^a}{4}=1$, i.e. $\mathrm{e}^a=4-\mathrm{e}$, donc $\boxed{a=\ln(4-\mathrm{e})}$.

2. Déterminer l'espérance de X.

Correction

On calcule

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k\geqslant 0} k\mathbb{P}(X=k)\\ &= \sum_{k\geqslant 1} k\frac{1+a^k}{4k!}\\ &= \frac{1}{4}\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{(k-1)!}+a\sum_{k\geqslant 1}\frac{a^{k-1}}{(k-1)!}\\ &\boxed{= \frac{\mathrm{e}+a\mathrm{e}^a}{4}}.\end{aligned}$$

3. Déterminer la loi de $X+Y$.

Correction

La variable $X+Y$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit n dans $\mathbb{N}$. Comme $\{(X=k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y=n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k, X+Y=n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k, Y=n-k) \text{ car } Y \text{ est à valeurs dans } \mathbb{N} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k) \text{ par indépendance} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1+a^k}{4k!} \frac{1+a^{n-k}}{4(n-k)!} \\
&= \frac{1}{16} \sum_{k=0}^{n} \frac{1+a^k+a^{n-k}+a^n}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{16n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1+a^k+a^{n-k}+a^n) \\
&= \frac{1+a^n}{16n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \frac{1}{16n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k + \frac{1}{16n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \\
&= \frac{(1+a^n)2^n}{16n!} + \frac{2}{16n!}(1+a)^n
\end{aligned}$$

Exercice 8. *Mines-Télécom 24*. On suppose que X et Y sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que : $\forall (i,k) \in \mathbb{N}^2, P(X=i, Y=k) = a\dfrac{i+k}{2^{i+k}}$.

1. Déterminer la valeur de a.

Correction

Le réel a est tel que $\displaystyle\sum_{(i,k)\in\mathbb{N}^2} \mathbb{P}(X=i, Y=k) = 1$. On calcule alors, en sachant que, comme on somme des quantités positives, on peut sommer dans l'ordre que l'on souhaite.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a\frac{i+k}{2^{i+k}} &= a\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i+k}{2^{i+k}} \\
&= a\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i}{2^{i+k}} + a\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^{i+k}}.
\end{aligned}$$

Comme on peut intervertir les sommes, on remarque que i et k jouent des rôles symétriques. On va juste calculer la première somme :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{i}{2^{i+k}} &= \sum_{i=0}^{+\infty} i\frac{1}{2^i}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} i\frac{1}{2^{i-1}}\\ &= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a\frac{i+k}{2^{i+k}} = 8a.$$

Il faut donc prendre $\boxed{a = \frac{1}{8}}$ pour que cette somme soit égale à 1.

2. X et Y sont-elles indépendantes ?

Correction

On va déterminer la loi de X. Soit $i \in \mathbb{N}$. Alors, $\{(Y = k),\ k \in \mathbb{N}\}$ étant un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = i) &= a\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X = i, Y = k)\\ &= a\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{i+k}{2^{i+k}}\\ &= ai\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{i+k}} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{2^{i+k}}\\ &= ai\frac{1}{2^i}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2^{i+1}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{2^{k-1}}\\ &= ai\frac{1}{2^i}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2^{i+1}}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}\\ &= ai\frac{1}{2^{i-1}} + \frac{1}{2^{i-1}}\\ &= a\frac{i+1}{2^{i-1}} = \frac{1}{8}\frac{i+1}{2^{i-1}} = \boxed{\frac{i+1}{2^{i+2}}}\end{aligned}$$

Par symétrie des variables i et k, Y suit la même loi que i. Ainsi, $\mathbb{P}(X = 0) \neq 0$, $\mathbb{P}(Y = 0) \neq 0$ mais $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 0$, donc X et Y ne sont pas indépendantes.

3. Calculer $P(X = Y)$.

Correction

Comme $\{(Y=k), k \in \mathbb{N}\}$ est un système complet d'événements, on sait que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=Y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=Y, Y=k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k, Y=k) \\
&= \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+k}{2^{k+k}} \\
&= \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k}{4^k} \\
&= \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{+\infty} 2 \frac{k}{4 \times 4^{k-1}} \\
&= \frac{1}{16} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{4^{k-1}} \\
&= \frac{1}{16} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} \boxed{= \frac{1}{9}}
\end{aligned}$$

Exercice 9. *Mines-Télécom 24*. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p.

1. Calculer $P(X_i > k)$ et $P(X_i \leqslant k)$.

Correction

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_i > k) &= \sum_{j>k} \mathbb{P}(X_i = j) \\
&= \sum_{j \geqslant k+1} pq^{j-1} \\
&= pq^k \frac{1}{1-q} = q^k.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{P}(X_i \leqslant k) = 1 - \mathbb{P}(X_i > k) = 1 - q^k$.

2. Soit $Y = \min(X_1, \ldots, X_n)$.
   (a) Calculer $P(Y > k)$ puis $P(Y \leqslant k)$ et $P(Y = k)$.

Correction

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y > k) &= \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_n) > k) \\ &= \mathbb{P}(X_1 > k \text{ et } X_2 > k \text{ et } \dots \text{ et } X_n > k) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > k) \text{ par indépendance.} \\ &= \prod_{i=1}^{n} q^k \boxed{= q^{nk}}\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{P}(Y \leqslant k) = 1 - q^{nk}$ et $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(Y > k-1) - \mathbb{P}(Y > k) = q^{n(k-1)} - q^{nk} = q^{n(k-1)}(1-q^n)$.

(b) Montrer que Y a une espérance finie, que l'on calculera.

Correction

On sait que pour X à valeurs dans $[0, +\infty]$ (fermé !), alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geqslant 1} \mathbb{P}(X \geqslant 1).$$

Donc, ici,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k \geqslant 1} \mathbb{P}(Y \geqslant k) \\ &= \sum_{k \geqslant 0} \mathbb{P}(Y > k) \\ &= \sum_{k \geqslant 0} q^{nk} \\ &= \frac{1}{1-q^n} < +\infty,\end{aligned}$$

donc Y admet une espérance finie, égale à $\dfrac{1}{1-q^n}$.

Exercice 10. *CCINP 2023*. Soit une urne avec 3 jetons numérotés. On tire avec remise des jetons de l'urne. On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages nécessaire pour obtenir 2 jetons différents pour la première fois. On note Z la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages nécessaires pour obtenir les 3 jetons pour la première fois.

1. Donner la loi de Y.

Correction

On suppose les deux jetons numérotés 1, 2 et 3. On note, pour k dans $\mathbb{N}^*$, X_k la variable

 nlaillet.math@gmail.com

uniforme sur $\{1,2,3\}$ correspondant au chiffre du k-ième tirage. Alors, pour $n \geqslant 2$,

$$\{Y=n\} = (X_1=1, X_2=1, \dots, X_{n-1}=1, X_n \neq 1) \sqcup (X_1=2, X_2=2, \dots, X_{n-1}=2, X_n \neq 2) \sqcup (X_1=3, X_2=3, \dots,$$

Donc Y est à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et, pour $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}(Y=n) = 3 \times \frac{1}{3^{n-1}} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3^{n-2}}.$$

2. Reconnaitre la loi de $Y-1$. En déduire la variance et l'espérance de Y.

Correction

On remarque que $Y-1 \sim \mathscr{G}(2/3)$: en effet, Y est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(Y-1=n) = \mathbb{P}(Y=n+1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3^{n-1}}.$$

Donc $\mathbb{E}(Y-1) = \dfrac{1}{2/3} = \dfrac{3}{2}$, donc $\boxed{\mathbb{E}(Y) = \dfrac{5}{2}}$, et $\mathbb{V}(Y-1) = \dfrac{q}{p^2} = \dfrac{1/3}{(2/3)^2} = \dfrac{3}{4}$ donc $\boxed{\mathbb{V}(Y) = \dfrac{3}{4}}$.

3. Déterminer la loi de (Y,Z).

Correction

Déjà, (Y,Z) sont à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^2$:

- si $k \leqslant 1$ ou $n \leqslant 2$ ou $n \leqslant k$, $\mathbb{P}(Y,Z) = 0$ (situations impossibles)
- sinon, si $2 \leqslant k < n$, alors

$$\mathbb{P}_{Y=k}(Z=n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-1} \frac{1}{3}$$

  (obtenir le troisième chiffre à l'instant n en sachant qu'on en a déjà obtenu 2 à l'instant k, c'est faire $n-k-1$ tirages des deux chiffres déjà tirés $(2/3)^{n-k-1}$ puis de tirer le troisième chiffre $(1/3)$) Ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=k, Z=n) &= \mathbb{P}(Y=k)\mathbb{P}_{Y=k}(Z=n)\\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-1} \frac{1}{3}\\ &= \frac{1}{3^n} \left(\frac{2}{3}\right)^{-k}\\ &\boxed{= \frac{1}{3^n} \left(\frac{3}{2}\right)^{k}.}\end{aligned}$$

4. Donner enfin la loi de Z.

Correction

On en déduit la loi de Z car $\{(Y=k),\ k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}\}$ est un système complet d'événements :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=n) &= \sum_{k=2}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=k, Z=n)\\ &= \sum_{k=2}^{n-1}\mathbb{P}(Y=k, Z=n)\\ &= \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{3^n}\left(\frac{3}{2}\right)^k\\ &= \frac{1}{3^n}\left(\frac{3}{2}\right)^2\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-k}}{1-\frac{3}{2}}\\ &= \frac{2}{3^n}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n-k+2}-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)\end{aligned}$$

Exercice 11. *Mines-Télécom 24*. Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.

1. Montrer que $Z=X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

Correction

Déjà, Z est bien à valeurs dans $\mathbb{N}$. Ensuite, si $k\in\mathbb{N}$, comme $\{(Y=i), i\in\mathbb{N}\}$ est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=k) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z=k, Y=i) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k-i, Y=i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=k-i, Y=i) \text{ car } X \text{ est à valeurs dans } \mathbb{N} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=k-i)\mathbb{P}(Y=i) \text{ par indépendance} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-i}}{(k-i)!} \mathrm{e}^{-\mu} \frac{\mu^i}{i!} \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} \mu^i \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu} \frac{1}{k!} (\lambda+\mu)^k,
\end{aligned}$$

donc $Z \sim \mathbb{P}(\lambda+\mu)$.

2. Calculer $P_{Z=n}(X=k)$ pour $(k,n) \in \mathbf{N}^2$.

Correction

Soient n dans $\mathbb{N}$ et k dans $\mathbb{N}$. Alors

$$\mathbb{P}_{Z=n}(X=k) = \frac{\mathbb{P}(Z=n, X=k)}{\mathbb{P}(Z=n)} = \frac{\mathbb{P}(Y=n-k, X=k)}{\mathbb{P}(Z=n)}.$$

Déjà, si $k > n$, cette probabilité est nulle. Ensuite, si $k \leqslant n$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{Z=n}(X=k) &= \frac{\mathbb{P}(Y=n-k)\mathbb{P}(X=k)}{\mathbb{P}(Z=n)} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}}{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

3. Reconnaître alors la loi conditionnelle de X sachant $(Z=n)$.

Correction

Donc la loi de X conditionnée à $Z = n$ est une loi $\mathscr{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$.

Exercice 12. *CCINP 23*. Soit $Y = 1 + X^2$ où X suit une loi de Poisson de paramètre λ.

1. Calculer $E(Y)$.

Correction

Par la formule de transfert,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k\geqslant 0}(1+k^2)\mathbb{P}(X=k)\\
&= 1 + \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k\geqslant 0} k^2\frac{\lambda^k}{k!}\\
&= 1 + \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k\geqslant 1} k\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\\
&= 1 + \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{\ell\geqslant 0}(1+\ell)\frac{\lambda^{\ell+1}}{\ell!}\\
&= 1 + \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{\ell\geqslant 0}\frac{\lambda^{\ell+1}}{\ell!} + \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{\ell\geqslant 0}\ell\frac{\lambda^{\ell+1}}{\ell!}\\
&= 1 + \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda\sum_{\ell\geqslant 0}\frac{\lambda^{\ell}}{\ell!} + \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{\ell\geqslant 1}\frac{\lambda^{\ell+1}}{(\ell-1)!}\\
&= 1 + \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda\mathrm{e}^{\lambda} + \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^2\sum_{\ell\geqslant 1}\frac{\lambda^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\\
&= 1 + \lambda + \lambda^2.
\end{aligned}$$

2. Calculer $P(2X < Y)$.

Correction

On remarque qu'on a, pour $\omega \in \Omega$, les équivalences $2X(\omega) < Y(\omega) \Leftrightarrow 2X(\omega) < 1 + X(\omega)^2 \Leftrightarrow (1 - X(\omega))^2 > 0$ Donc

$$\mathbb{P}(2X < Y) = 1 - \mathbb{P}(X = 1) = 1 - \lambda\mathrm{e}^{\lambda}.$$

Exercice 13. *Mines-Ponts 24*. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$. On note $q=1-p$ et pour $n,k\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant 2$ et $k\geqslant 1$, on pose : $A_n=(X_1<\cdots<X_n)$, $u_n=P(A_n)$, $B_{n,k}=(X_1=k, X_1<\cdots<X_n)$, $v_{n,k}=P(B_{n,k})$. Enfin pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $\pi_n=\displaystyle\prod_{j=1}^{n}\left(1-q^j\right)$.

1. Calculer $P(X_1=X_2)$ et $P(X_1<X_2)$.

Correction

Comme $\{(X_1=n), n\in\mathbb{N}\}$ est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1=X_2) &= \sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}(X_1=X_2, X_1=n)\\
&= \sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}(X_2=n, X_1=n)\\
&= \sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}(X_1=n)\mathbb{P}(X_2=n) \text{ par indépendance}\\
&= \sum_{n\geqslant 1}p^2q^{2n-2}\\
&= p^2\sum_{n\geqslant 1}(q^2)^{n-1}\\
&\boxed{= p^2\frac{1}{1-q^2}.}
\end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1<X_2) &= \sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}(X_1<X_2, X_1=n)\\
&= \sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}(X_2>n, X_1=n)\\
&= \sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}(X_1=n)\mathbb{P}(X_2>n) \text{ par indépendance}\\
&= \sum_{n\geqslant 1}pq^{n-1}q^n\\
&= pq\sum_{n\geqslant 1}(q^2)^{n-1}\\
&\boxed{= \frac{pq}{1-q^2}.}
\end{aligned}$$

2. Pour $n\geqslant 3$ et $k\in\mathbb{N}^*$, montrer que : $v_{n,k}=pq^{k-1}\displaystyle\sum_{j=k+1}^{+\infty}v_{n-1,j}$.

Correction

On fixe $n \geqslant 3$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Alors, comme $\{(X_2 = j), j \in \mathbb{N}^*\}$ est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned} v_{n,k} &= \mathbb{P}\left(X_1 = k, X_1 < \cdots < X_n\right) \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = k, X_1 < \cdots < X_n, X_2 = j) \\ &= \sum_{j=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = k, X_2 < X_3 < \cdots < X_n, X_2 = j) \\ &= \sum_{j=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 < X_3 < \cdots < X_n, X_2 = j) \\ &= \sum_{j=k+1}^{+\infty} pq^{k-1}\mathbb{P}(X_2 < X_3 < \cdots < X_n, X_2 = j). \end{aligned}$$

Or, par indépendance et caractère identiquement distribué des (X_i),

$$\mathbb{P}(X_2 < X_3 < \cdots < X_n, X_2 = j) = \mathbb{P}(X_1 < X_2 < \cdots < X_{n-1}, X_1 = j) = v_{n-1,j}.$$

Donc

$$v_{n,k} = pq^{k-1} \sum_{j=k+1}^{+\infty} v_{n-1,j}.$$

3. En déduire que, pour $n \geqslant 2$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $v_{n,k} = \dfrac{1}{\pi_{n-1}} \left(pq^{k-1}\right)^n q^{\alpha_n}$ où α_n est un entier à préciser

Correction

Là, c'est intéressant, on va procéder par analyse-synthèse ! Si on écrit que $v_{n,k} =$

$\dfrac{1}{\pi_{n-1}}\left(pq^{k-1}\right)^n q^{\alpha_n}$. Alors on remarque que

$$\begin{aligned}
pq^{k-1}\sum_{j=k+1}^{+\infty} v_{n-1,j} &= pq^{k-1}\sum_{j=k+1}^{+\infty}\frac{1}{\pi_{n-2}}\left(pq^{j-1}\right)^{n-1} q^{\alpha_{n-1}}\\
&= pq^{k-1}\frac{1}{\pi_{n-2}}p^{n-1}q^{\alpha_{n-1}}\sum_{j=k+1}^{+\infty}\left(q^{n-1}\right)^{j-1}\\
&= pq^{k-1}\frac{1}{\pi_{n-2}}p^{n-1}q^{\alpha_{n-1}}(q^{n-1})^k\frac{1}{1-q^{n-1}}\\
&= p^n q^{k-1+kn-k} q^{\alpha_{n-1}}\frac{1}{\pi_{n-1}}\\
&= p^n q^{kn-1} q^{\alpha_{n-1}}\frac{1}{\pi_{n-1}}\\
&= p^n q^{(k-1)n+n-1} q^{\alpha_{n-1}}\frac{1}{\pi_{n-1}}\\
&= p^n (q^{k-1})^n q^{\alpha_{n-1}+n-1}\frac{1}{\pi_{n-1}}
\end{aligned}$$

Ici, on voit que l'on a $\alpha_n = \alpha_{n-1}+n-1$. Donc $\alpha_n = C+\dfrac{n(n-1)}{2}$, où C est à déterminer. Or,

$$\begin{aligned}
v_{2,k} &= \mathbb{P}(X_1 = k, X_2 > X_1)\\
&= \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 > k)\\
&= pq^{k-1}q^k\\
&= pq^{2k-1}\\
&= (pq^{k-1})^2\frac{1}{p}q = (pq^{k-1})^2 q^1\frac{1}{\pi_1},
\end{aligned}$$

donc $\alpha_2 = 1$. Ainsi, $\alpha_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$. On démontre le résultat par récurrence sur n ensuite.

4. Établir enfin que, pour $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{1}{\pi_n}p^{\beta_n}q^{\gamma_n}$ où β_n et γ_n sont des entiers que l'on précisera.

Correction

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

On conclut en disant que, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
u_n &= \mathbb{P}(X_1 < \cdots < X_n) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = k, X_1 < X_2 < \cdots < X_n) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi_{n-1}} \left(pq^{k-1}\right)^n q^{\alpha_n} \qquad = \frac{1}{\pi_{n-1}} p^n q^{\alpha_n} \sum_{k=1}^{+\infty} (q^n)^{k-1} \\
&= \frac{1}{\pi_{n-1}} p^n q^{\alpha_n} \frac{1}{1-q^n} \\
&= \frac{1}{\pi_n} p^n q^{\alpha_n},
\end{aligned}$$

d'où le résultat en posant $\beta_n = n$ et $\gamma_n = \alpha_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

5. (question qui n'était pas dans la planche, en mode Centrale Maths II) Vérifier le résultat avec python.

Correction

On propose

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def A(n,p):
    i = 1
    x = rd.geometric(p)
    y = rd.geometric(p)
    while i<n and x<y:
        x,y = y,rd.geometric(p)
        i+=1
    return i==n

def pi(p,n):
    q = 1-p
    res = 1
    for i in range(1,n+1):
        res*= (1-q**i)
    return res

def estim(n,p,N):
    q = 1-p
    res = 0
    for _ in range(N):
        res+=A(n,p)
    return res/N,(1/pi(p,n))*(p**n)*(q**(n*(n-1)/2))
```

Et on trouve

```
>>> estim(2,0.3,100000)
(0.41274, 0.41176470588235287)

>>> estim(3,0.3,100000)
(0.0934, 0.09213000268600584)

>>> estim(5,0.4,100000)
(0.00041, 0.0003843205394579759)
```

Ce sont des résultats cohérents !

Exercice 14. *Centrale 24*. Une candidate doit se rendre sur un lieu de convocation. Elle dispose pour cela de 2 chemins : le chemin A et le chemin B. Elle prend le chemin A avec une probabilité $p \in]0,1[$. Soit T la variable aléatoire égale au temps de trajet de la candidate, en minutes. Le temps de trajet du chemin A (respectivement B) suit une loi de Poisson de paramètre $a > 0$ (respectivement $b > 0$).

1. (a) **[Py]** Écrire une fonction prenant comme argument p, a et b et renvoyant la valeur de T.

Correction

On propose

```python
import numpy.random as rd

def T(p,a,b):
    x = rd.random()
    if x<p:
        return rd.poisson(a)
    else:
        return rd.poisson(b)
```

(b) **[Py]** On prend $a = 5$ et $b = 10$. Donner les valeurs moyennes de T avec $N = 500$ simulations pour $p \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}$.

Correction

On propose

```python
def moyenne(p,a,b,N):
    res = 0
    for _ in range(N):
        res += T(p,a,b)
    return res/N
```

On obtient

```
>>> moyenne(0.25,5,10,10000)
8.7552
```

```
>>> moyenne(0.5,5,10,10000)
7.4901

>>> moyenne(0.75,5,10,10000)
6.2476
```

(c) **[Py]** Proposer une fonction calculant une approximation de $E(T)$, justifiée par un résultat précis du cours.

Correction

Il suffit d'utiliser la fonction de la question précédente car, d'après la loi faible des grands nombres, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de vaiid, alors $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ converge en probabilité vers $\mathbb{E}(X_1)$.

2. Déterminer la loi de T en fonction de p, a et b, puis calculer $E(T)$ et $V(T)$ si elles existent.

Correction

Notons X la variable de Bernoulli de paramètre p valant 0 si la candidate prend le chemin a et 1 si elle prend le chemin b. La variable T est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T=n) &= \mathbb{P}_{X=0}(T=n)\mathbb{P}(X=a) + \mathbb{P}_{X=1}(T=n)\mathbb{P}(X=b)\\ &= \mathrm{e}^{-a}\frac{a^n}{n!}p + \mathrm{e}^{-b}\frac{b^n}{n!}(1-p).\end{aligned}$$

On voit alors facilement que la série de terme général $n\mathbb{P}(T=n)$ converge et que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(T=n)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\mathrm{e}^{-a}\frac{a^n}{n!}p + \mathrm{e}^{-b}\frac{b^n}{n!}(1-p)\right)\\ &= p\mathrm{e}^{-a}\sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{a^n}{n!} + \mathrm{e}^{-b}(1-p)\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{b^n}{n!}\\ &= p\mathrm{e}^{-a}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{(n-1)!} + \mathrm{e}^{-b}(1-p)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b^n}{(n-1)!}\\ &= pa\mathrm{e}^{-a}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^{n-1}}{(n-1)!} + \mathrm{e}^{-b}(1-p)b\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b^{n-1}}{(n-1)!}\\ &= pa + (1-p)b\end{aligned}$$

Ce résultat est cohérent avec les tests python. J'ai changé le programme en

```python
def moyenne(p,a,b,N):
    res = 0
    for _ in range(N):
        res += T(p,a,b)
    return res/N,p*a+(1-p)*b
```

On trouve alors

```python
>>> moyenne(0.25,5,10,100000)
(8.7556, 8.75)

>>> moyenne(0.5,5,10,100000)
(7.51172, 7.5)

>>> moyenne(0.75,5,10,100000)
(6.24631, 6.25)
```

Ces résultats sont cohérents. **En fait, on a montré que $\mathbb{E}(T) = p\mathbb{E}(Y) + (1-p)\mathbb{E}(Z)$, où $Y \sim \mathscr{P}(a)$ et $Z \sim \mathscr{P}(b)$.**
Ensuite, on sait que $\mathbb{V}(T)$, si elle existe, vaut $\mathbb{E}(T^2) - \mathbb{E}(T)$. Or, si elle existe,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T^2) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \mathbb{P}(T=n)\\ &= p\mathrm{e}^{-a}\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \frac{a^n}{n!} + \mathrm{e}^{-b}(1-p)\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \frac{b^n}{n!}\\ &= p\mathbb{E}(Y^2) + (1-p)\mathbb{E}(Z^2),\end{aligned}$$

où $Y \sim \mathscr{P}(a)$ et $Z \sim \mathscr{P}(b)$. Ainsi, on obtient

$$\mathbb{V}(T) = p\mathbb{V}(Y) + (1-p)\mathbb{V}(Z) = pa + (1-p)b.$$

3. Déterminer N de sorte que, dans 95% des cas, on observe un écart maximum de 30 secondes entre la valeur moyenne de N simulations et l'espérance de T.

Correction

Là, il s'agit de mettre en œuvre la loi des grands nombres. On note $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vaiid telles que $X_1 \sim T$. On sait que, pour $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i - \mathbb{E}(T)\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(T)}{N\varepsilon^2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i - \mathbb{E}(T)\right| \leqslant \frac{30}{60}\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i - \mathbb{E}(T)\right| \leqslant \frac{1}{2}\right)\\ &\geqslant 1 - \frac{\mathbb{V}(T)}{N\frac{1}{4}} = 1 - \frac{4\mathbb{V}(T)}{N}.\end{aligned}$$

Il suffit donc d'avoir $1 - \dfrac{4\mathbb{V}(T)}{N} \geqslant \dfrac{95}{100}$, i.e. $\dfrac{4\mathbb{V}(T)}{N} \leqslant \dfrac{5}{100}$, ou encore $\boxed{N \geqslant 80\mathbb{V}(T)}$.

Exercice 15. *Mines 24*. Soient $r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant 4$, $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $[\![1, r]\!]$. On note A_n l'événement : on retrouve n fois chaque entier de $[\![1, r]\!]$ dans le nr uplet $(X_1, \dots, X_{nr})$.

1. Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.

Correction

Voilà pourquoi j'ai mis cet exercice, **pour faire du dénombrement** ! On remarque que $(X_1, \dots, X_{nr})$ suit une loi uniforme sur $[\![1, r]\!]^{nr}$, ensemble de cardinal r^{nr}.
Or, choisir un nr-uplet avec n fois chaque entier dans $[\![1, r]\!]$, c'est

- choisir la position des 1 : $\dbinom{nr}{n}$ choix,
- choisir la position des 2 : $\dbinom{n(r-1)}{n}$ choix,
- ...

D'où le nombre de choix possibles égal à

$$\begin{aligned}\prod_{i=0}^{r-1}\binom{n(r-i)}{n} &= \prod_{i=0}^{r-1}\frac{(n(r-i))!}{n!((r-i-1)n)!}\\ &= \prod_{i=0}^{r-1}\frac{(n(r-i))!}{(n(r-i-1))!}\\ &= \frac{1}{(n!)^r}\frac{(nr)!}{0!} = \boxed{\frac{(nr)!}{(n!)^r}}\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{P}(A_n) = \frac{(nr)!}{(n!)^r r^{nr}}}$$

2. Déterminer la probabilité qu'une infinité de A_n se réalisent.

Correction

L'événement « une infinité de A_n se réalisent » est l'événement

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N,\ A_n \text{ se réalise},$$

c'est-à-dire

$$\bigcap_{N\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\geqslant N} A_n.$$

Par continuité décroissante, la probabilité de cet événement est

$$\lim_{N\to+\infty}\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geqslant N} A_n\right).$$

Or, à N fixé,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geqslant N} A_n\right)\leqslant\sum_{n\geqslant N}\mathbb{P}(A_n).$$

Étudions alors la série de terme général (A_n). On remarque que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_n) &= \frac{1}{(n!)^r}\frac{(nr)!}{r^{nr}}\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{(2\pi n)^{\frac{r}{2}}}\left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^{nr}\sqrt{2\pi nr}\left(\frac{nr}{\mathrm{e}}\right)^{nr}\frac{1}{r^{nr}}\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{r}}{(2\pi n)^{\frac{r-1}{2}}}\end{aligned}$$

Or, $r\geqslant 4$ donc $\dfrac{r-1}{2}>1$. Donc la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ converge, donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant N}\mathbb{P}(A_n)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Donc $\displaystyle\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geqslant N} A_n\right)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}0$, donc la probabilité de l'événement recherché est nulle.