Chapitre 07
Suites et séries de fonctions – Résumé de cours

1 Modes de convergence

Définition 1

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{K}$.

1. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **simplement** (ou ponctuellement) vers f si pour tout x dans I, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. On dit que f est la limite simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **uniformément** vers f si pour tout n, $f_n - f$ est bornée sur I et si $\|f_n - f\|_\infty^{\mathrm{I}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On dit que f est la limite uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 2

1.
   - convergence simple : $\forall x \in \mathrm{I},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$
   - convergence uniforme : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \forall x \in \mathrm{I},\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$
2. On a l'unicité de la limite, ainsi que le passage aux combinaisons linéaires.
3. Pour la convergence uniforme, elle ne passe ni aux produits, ni aux composées.

Définition 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$.

1. On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement (resp. uniformément) si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement (resp. uniformément).
2. (Prop immédiate, quasi-définition, et fondamentale) La série de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et si la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes converge uniformément vers 0.
3. On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement si pour tout n dans $\mathbb{N}$, u_n est bornée sur I et si $\sum \|u_n\|_{n\in\mathbb{N}}^{\mathrm{I}}$ converge.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Proposition 4

1. La convergence uniforme implique la convergence simple (vers la même fonction). La réciproque est (très) fausse.
2. La convergence normale de $\sum u_n$ implique la convergence uniforme de $\sum u_n$ et, pour tout x dans I, la convergence absolue de $\sum u_n(x)$.

Point de méthode 5

- **Suites de fonctions.**
  1. On étudie d'abord la convergence simple, on en déduit la limite potentielle f.
  2. Pour étudier la convergence uniforme, on essaie de majorer $|f_n(x) - f(x)|$ par une quantité a_n **indépendante de** x et qui tend vers 0.
  3. Dans de (très rares) cas on cherchera vraiment le maximum de $f_n - f$ sur I.
- **Séries de fonctions.**
  1. On étudie d'abord la convergence simple grâce aux théorèmes sur les séries (critère de Riemann).
  2. On regarde si, par chance, il n'y a pas de convergence normale.
  3. Lorsqu'on a affaire à une série alternée, on pense à étudier la convergence uniforme du reste, car **le comportement du reste d'une série alternée est gouverné par le premier terme**.

2 Applications

2.1 Limites et continuité

Proposition 6 (Limites)

1. (théorème HP) Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur I converge uniformément sur I et si, pour tout n, f_n admet une limite (finie) ℓ_n en a borne de I (éventuellement infinie), alors la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{K}$ et $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

2. (théorème au programme, allez savoir pourquoi) Si une série $\sum u_n$ de fonctions définies sur I converge uniformément sur I et si, pour tout n, u_n admet une limite (finie) ℓ_n en a borne de I (éventuellement infinie), alors la série $\sum \ell_n$ converge, la somme de la série admet une limite en a et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.

Proposition 7 (Continuité)

1. Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur I converge uniformément sur I et si, pour tout n, f_n est continue sur I, alors f est continue sur I.
2. Si une série $\sum u_n$ de fonctions définies sur I converge uniformément sur I et si, pour tout n, u_n est continue sur I, alors $\sum u_n$ est continue sur I.

Point de méthode 8 (Méthode FONDAMENTALE)

Pour **TOUS** les théorèmes de régularité que l'on verra, il suffit de vérifier la convergence uniforme **sur tout segment** de I.
Plus précisément, on écrira, si (f_n) est une suite de fonctions et f est sa limite simple :
« Soient $a < b$ tels que $[a, b] \subset \mathrm{I}$.
$(\dots)$
Alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$.
Comme pour tout n dans $\mathbb{N}$, f_n est continue sur I et comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I, on en déduit que f est continue sur I. »

2.2 Intégration et régularité supérieure

Proposition 9 (Théorème d'intégration sur un segment)

1. Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur **le segment** $[a,b]$ converge uniformément sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)dt$.
2. Si une série $\sum u_n$ de fonctions continues sur **le segment** $[a,b]$ converge uniformément sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\sum \int_a^b u_n$ converge et $\displaystyle\int_a^b \sum_{n\geqslant 0} u_n(t)dt = \sum_{n\geqslant 0}\int_a^b u_n(t)dt$.

Proposition 10 (Dérivation d'une suite, d'une série de fonctions)

1. Si une suite (f_n) de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I converge simplement sur I vers une fonction f, et si la suite (f_n') converge uniformément sur I vers une fonction g, alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f' = g$.
2. Si une série $\sum f_n$ de classe $\mathscr{C}^1$ converge simplement sur un intervalle I et si la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur I, alors la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et sa dérivée est $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

Point de méthode 11 (Méthode FONDAMENTALE, bis)

Pour **TOUS** les théorèmes de régularité que l'on verra, il suffit de vérifier la convergence uniforme **sur tout segment** de I.

Remarque 12

On étend la proposition précédente pour démontrer la classe $\mathscr{C}^k$ de la limite d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en démontrant la convergence simple des $(f_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ $(0\leqslant j<k)$ sur I et la convergence uniforme de $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ sur I (**ou, encore une fois, sur tout segment de I**). On étend bien sûr aux séries de fonctions.