TD 15
Calcul différentiel

1 Dérivation de fonctions à valeurs vectorielles

Exercice 1. *Mines 23*. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ et X_0 une solution du système différentiel $X'(t) = A(t)X(t)$. Montrer que $\Omega = \{X_0(t), t \in \mathbb{R}\}$ est inclus dans une sphère de centre 0 de $\mathbb{R}^3$.

Correction

Si l'on écrit bien les choses, cet exercice n'est pas très compliqué... Ce que l'on cherche à faire, c'est montrer que la fonction $\varphi : t \mapsto \|X_0(t)\|^2$ est constante. Or, φ est bien dérivable, et comme $\varphi(t) = \langle X_0(t), X_0(t)\rangle$, on sait, par la règle de dérivation de $B(f, g)$ où f et g sont dérivables et B est bilinéaire, que

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= 2\langle X_0'(t), X_0(t)\rangle \\ &= 2\langle AX_0(t), X_0(t)\rangle \\ &= 2X_0(t)^\top A^\top X_0(t) \\ &= -2X_0(t)^\top AX_0(t) \\ &= -2\langle X_0(t), AX_0(t)\rangle \\ &= -2\langle AX_0(t), X_0(t)\rangle \\ &= -\varphi'(t),\end{aligned}$$

donc $\varphi'(t) = 0$ pour tout t réel, donc φ est constante sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie que $\|X_0(t)\|^2$ est constante sur $\mathbb{R}$, donc Ω est bien inclus dans une sphère de centre 0 et de rayon $\|X_0(0)\|$.

Exercice 2. *Centrale 22*. Considérons une fonction $F : t \mapsto (x(t), y(t))$ de classe $\mathcal{C}^1$, 2π-périodique, telle que sa restriction à $[0, 2\pi[$ soit injective et telle que F' ne s'annule pas. Notons $\mathcal{C}$ le support de F.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est inclus dans un disque centré sur l'origine et de rayon $R > 0$.

Correction

La fonction x est **continue** sur **le segment** $[0, 2\pi]$, donc elle est bornée sur $[0, 2\pi]$. Comme x est 2π-périodique, elle est bornée sur $\mathbb{R}$, par $\alpha > 0$. De même, y est bornée sur $\mathbb{R}$ par, disons, $\beta > 0$. Ainsi, pour tout t dans $\mathbb{R}$, $\|F(t)\| \leqslant \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. En notant R cette quantité, on a le résultat.

2. Montrer qu'il existe $P, Q \in \mathcal{C}$ tels que $\|\overrightarrow{PQ}\| = \sup\{\|\overrightarrow{AB}\|; (A, B) \in \mathcal{C}^2\}$. Montrer que les tangentes à $\mathcal{C}$ en P et Q sont orthogonales à la droite (PQ).

Correction

On considère l'application

$$\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (t, t') \mapsto \|F(t') - F(t)\| \end{array}\right.$$

Alors φ est continue. Donc sur le fermé borné $[0, 2\pi]^2$, φ est bornée et atteint ses bornes. Elle est maximale en un point (t_0, t_1). Alors en notant $P = F(t_0)$ et $Q = F(t_1)$, on en déduit que

$$\|PQ\| = \max\left\{\|F(t') - F(t)\|, t \in [0, 2\pi]^2\right\} = \max\left\{\|F(t') - F(t)\|, t \in \mathbb{R}^2\right\},$$

par 2π périodicité de F. On considère désormais l'application

$$\varphi : t \mapsto \|F(t) - P\|^2$$

On vient de démontrer que φ admettait son maximum en t_1, donc $\varphi'(t_1) = 0$. Mais

$$\varphi'(t) = 2\left\langle F'(t), F(t) - P\right\rangle.$$

Donc

$$\varphi'(t_1) = 2\left\langle F'(t_1), F(t_0) - P\right\rangle = 2\left\langle F'(t_1), \overrightarrow{PQ}\right\rangle,$$

ce qui signifie que $\overrightarrow{PQ}$ est orthogonal au vecteur $F'(t_1)$, qui est un vecteur directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ en Q ! On fait de même pour P.

Exercice 3. *Mines 19*. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M : \mathbb{R} \longmapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que l'application $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(x) = M(x)^\top M(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.

Correction

L'application $(A, B) \mapsto A^\top B$ est bilinéaire, donc f est dérivable et

$$f'(x) = M'(x)^\top M(x) + M(x)^\top M'(x).$$

2. Soient $A : \mathbb{R} \to \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ continue et $M : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ solution de l'équation différentielle $M'(x) = A(x)M(x)$. On suppose que $M(0) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $M(x) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

Correction

En posant la fonction f de la question précédente, on sait que f est dérivable et que pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= M'(x)^\top M(x) + M(x)^\top M'(x)\\
&= (A(x)M(x))^\top M(x) + M(x)^\top A(x)M(x)\\
&= M(x)^\top A(x)^\top M(x) + M(x)^\top A(x)M(x)\\
\\
&= -M(x)^\top A(x)M(x) + M(x)^\top A(x)M(x)\\
&= 0_n,
\end{aligned}$$

donc f est constante, égale à $f(0) = \mathrm{I}_n$, donc pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{I}_n$, i.e. $M(x)^\top M(x) = \mathrm{I}_n$, i.e. $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
Mais alors $g : x \mapsto \det(M(x))$ est une fonction continue, à valeurs dans $\{-1, 1\}$. Donc g est constante (car si g prenait les valeurs 1 et -1, étant continue, par le TVI elle prendrait la valeur 0, absurde !). Donc pour tout x dans $\mathbb{R}$, $g(x) = g(0) = \det(M(0)) = 1$, donc pour tout x dans $\mathbb{R}$, $M(x) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

2 Fonctions de plusieurs variables : EDP et règle de la chaîne

Exercice 4. *Mines 22*. On note $E = \mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ et $F = \mathscr{C}^0\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$. Soit a et b deux réels. On note :

$$\varphi : \left| \begin{array}{l} E \to F \\ f \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x} - af \end{array} \right. \quad \text{et } \psi : \left| \begin{array}{l} E \to F \\ f \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y} - bf \end{array} \right.$$

1. On pose : $f(x, y) = \mathrm{e}^{ax} \displaystyle\int_0^x A(t, y)\mathrm{e}^{-at}\, \mathrm{d}t$ avec $A \in E$. Justifier l'existence des dérivées partielles de f et les calculer.

Correction

Fixons $y \in \mathbb{R}$. Alors $t \mapsto A(t,y)\mathrm{e}^{-at}$ est une fonction continue, donc $x \mapsto \displaystyle\int_0^x A(t,y)\mathrm{e}^{-at}dt$ en est une primitive. Donc $x \mapsto f(x,y)$ est dérivable, ce qui signifie que f admet bien une dérivée partielle par rapport à x et

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= a\mathrm{e}^{ax}\int_0^x A(t,y)\mathrm{e}^{-at}dt + \mathrm{e}^{ax}A(x,y)\mathrm{e}^{-ax}\\ &= a\mathrm{e}^{ax}\int_0^x A(t,y)\mathrm{e}^{-at}dt + A(x,y)\end{aligned}$$

Fixons maintenant $x \in \mathbb{R}$. On note $g(y,t) = A(t,y)\mathrm{e}^{-at}$. Alors

- pour tout y, $t \mapsto g(y,t)$ est continue et intégrable sur $[0,x]$,
- pour tout t, $y \mapsto g(y,t)$ est dérivable et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(y,t) = \dfrac{\partial A}{\partial y}(t,y)\mathrm{e}^{-at}$,
- pour tout y, $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial y}(y,t)$ est continue sur $[0,x]$,
- Soient $\alpha < \beta$ deux réels. A étant $\mathscr{C}^1$, la fonction $(t,y) \mapsto \dfrac{\partial A}{\partial y}(t,y)$ est **continue** sur le **fermé borné en dimension finie** $[0,x] \times [\alpha,\beta]$, donc on dispose de $M > 0$ tel que pour tout t dans $[0,x]$, pour tout y dans $[\alpha,\beta]$,

  $$\left|\frac{\partial A}{\partial y}(t,y)\right| \leqslant M.$$

  Supposons $x > 0$. Si t dans $[0,x]$ et y dans $[\alpha,\beta]$, que

  $$|g(y,t)| = \int_0^x M dt = Mx,$$

  indépendante de y. Si $x < 0$,

  $$|g(y,t)| = \int_x^0 M\mathrm{e}^{-ax}dt = M|x|\mathrm{e}^{-ax},$$

  aussi indépendant de y.

Dans les deux cas, par le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, on en déduit que $y \mapsto \displaystyle\int_0^x A(t,y)\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[\alpha,\beta]$, quels que soient α et β, donc sur tout $\mathbb{R}$, donc f admet une dérivée partielle selon y et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathrm{e}^{ax}\int_0^x \frac{\partial A}{\partial y}(t,y)\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t.$$

2. Soit

$$\begin{aligned}U &= \left\{f \in E,\ \exists\alpha \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = \alpha(y)\mathrm{e}^{ax}\right\}\\ V &= \left\{f \in E,\ \exists\beta \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = \beta(x)\mathrm{e}^{by}\right\}\end{aligned}$$

Montrer que $\ker(\varphi) = U$ et $\ker(\psi) = V$.

Correction

Les rôles de x et y (de a et de b) étant symétriques, on ne s'attarde que sur U.

- soit $f \in U$. Alors on dispose de $\alpha \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tel que $f(x,y) = \alpha(y)\mathrm{e}^{ax}$. Alors f

est bien $\mathscr{C}^1$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - af = af - af = 0.$$

donc $f \in \ker(\varphi)$.

- soit $f \in \ker(\varphi)$. Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = af(x,y).$$

Fixons $y \in \mathbb{R}$ et notons $g : x \mapsto f(x,y)$. Alors $g'(x) = ag(x)$, donc on dispose de $\alpha(y) \in \mathbb{R}$ telle que $g(x) = \alpha(y)\mathrm{e}^{ax}$. Donc on dispose de $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ f(x,y) = \alpha(y)\mathrm{e}^{ax}$$

De plus, $\alpha(y) = f(x,y)\mathrm{e}^{-ax}$, donc α est bien $\mathscr{C}^1$.

Donc $U = \ker(\varphi)$. On fait de même pour V.

3. Si $A \in E$, déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $\varphi(f) = A$ d'inconnue $f \in E$.

Correction

Soit $A \in E$. Par la question 1, on a vu qu'en posant

$$f_0(x,y) = \mathrm{e}^{ax} \int_0^x A(t,y)\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t,$$

alors

$$\frac{\partial f_0}{\partial x}(x,y) - af_0(x,y) = A(x,y),$$

donc f_0 est solution particulière de l'équation $\varphi(f) = A$. On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\{f_0 + f,\ \ f \in \ker(\varphi)\} = \left\{(x,y) \mapsto \mathrm{e}^{ax} \int_0^x A(t,y)\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t + \alpha(y)\mathrm{e}^{ax},\ \ \alpha \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\right\}.$$

Exercice 5. *CCINP 23*. Soient $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0\right\}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x+y}$ si$(x,y) \notin F$, et $f(x,y) = 0$ si $(x,y) \in F$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash F$ et que $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3f$.

Correction

Soit y fixé. Alors $x \mapsto f(x,y)$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-y\}$ et

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2xy^2(x+y) - x^2y^2}{(x+y)^2}\\ &= \frac{2x^2y^2 + 2xy^3 - x^2y^2}{(x+y)^2}\\ &= \frac{x^2y^2 + 2xy^3}{(x+y)^2},\end{aligned}$$

fonction continue sur $\mathbb{R} \setminus F$. De même, f admet une dérivée partielle selon y et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2y^2 + 2yx^3}{(x+y)^2},$$

fonction continue sur $\mathbb{R} \setminus F$. Donc f est bien $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus F$. De plus,

$$\begin{aligned} x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x^3y^2 + 2x^2y^3}{(x+y)^2} + \frac{x^2y^3 + 2y^2x^3}{(x+y)^2} \\ &= 3\frac{x^3y^2 + x^2y^3}{(x+y)^2} \\ &= 3x^2y^2\frac{x+y}{(x+y)^2} \\ &= 3f(x, y). \end{aligned}$$

2. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ et les calculer.

Correction

On considère

$$\varphi : x \mapsto f(x, 0) = 0,$$

et ce quelle que soit la valeur de x. Alors φ est bien dérivable, notamment en 0, ce qui signifie que f admet une dérivée partielle première en $(0, 0)$ et que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

Par symétrie des rôles de x et y, on montre aussi que f admet une dérivée partielle selon y en $(0, 0)$ et qu'elle est nulle.

3. La fonction f est-elle continue en $(0, 0)$?

Correction

On considère $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^5}\right)$. Alors $(x_n, y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (0, 0)$ mais

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^5}\right)^2}{\frac{1}{n^5}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^5}} = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc $f(x_n, y_n)$ ne tend pas vers $f(0, 0)$, ce qui assure que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Exercice 6. *Mines PC 23.*

1. Trouver les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(]1, +\infty[\times]0, +\infty[, \mathbb{R})$ telles que

$$x(x-1)\frac{\partial f}{\partial x} + y(x-1)\frac{\partial f}{\partial y} - x^2 f = 0$$

Indication. Effectuer le changement de variables $x = u$ et $y = uv$.

Correction

Analyse. Soit f une solution de l'équation. On définit, pour $u \in]1,+\infty[$ et $v \in]0,+\infty[$,

$$g(u,v) = f(u,uv).$$

Alors

$$f(x,y) = g\left(x, \frac{y}{x}\right).$$

Ainsi,

$$\partial_1 f(x,y) = \partial_1 g\left(x, \frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2}\partial_2 g\left(x, \frac{y}{x}\right)$$

et

$$\partial_2 f(x,y) = \frac{1}{x}\partial_2 g\left(x, \frac{y}{x}\right).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
&x(x-1)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y(x-1)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - x^2 f(x,y)\\
&= x(x-1)\partial_1 g\left(x, \frac{y}{x}\right) - x(x-1)\frac{y}{x^2}\partial_2 g\left(x, \frac{y}{x}\right) + y(x-1)\frac{1}{x}\partial_2 g\left(x, \frac{y}{x}\right) + x^2 g\left(x, \frac{y}{x}\right)\\
&= x(x-1)\partial_1 g\left(x, \frac{y}{x}\right) - x^2 g\left(x, \frac{y}{x}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x > 1$ et $y > 0$,

$$(x-1)\partial_1 g\left(x, \frac{y}{x}\right) - xg\left(x, \frac{y}{x}\right) = 0,$$

donc, comme l'application $(x,y) \mapsto (u,v)$ est une bijection, on en déduit que pour tout $u > 0$ et $v > 1$,

$$(u-1)\partial_1 g(u,v) - ug(u,v) = 0.$$

On fixe $v > 0$ et on pose $\varphi(u) = g(u,v)$. Alors φ est solution de l'équation différentielle

$$\varphi'(u) - \frac{u}{u-1}\varphi(u) = 0.$$

Comme une primitive de $\dfrac{u}{u-1} = 1 + \dfrac{1}{u-1}$ est $u + \ln(u-1)$, on en déduit que l'on dispose de $C(v)$ tel que pour tout $u > 1$,

$$\varphi(u) = C(v)(u-1)\mathrm{e}^u.$$

Comme φ et $u \mapsto (u-1)\mathrm{e}^u$ sont $\mathscr{C}^1$, C l'est aussi.
Donc on en déduit que

$$f(x,y) = C\left(\frac{y}{x}\right)(x-1)\mathrm{e}^x.$$

Synthèse. Soit C une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et

$$f(x,y) = C\left(\frac{y}{x}\right)(x-1)\mathrm{e}^x.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -\frac{y}{x^2}C'\left(\frac{y}{x}\right)(x-1)\mathrm{e}^x + C\left(\frac{y}{x}\right)(\mathrm{e}^x + (x-1)\mathrm{e}^x)\\
&= -\frac{y}{x^2}C'\left(\frac{y}{x}\right)(x-1)\mathrm{e}^x + C\left(\frac{y}{x}\right)x\mathrm{e}^x
\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x}C'\left(\frac{y}{x}\right)(x-1)\mathrm{e}^x.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
&x(x-1)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y(x-1)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - x^2 f(x,y)\\
&= -x(x-1)\frac{y}{x^2}C'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x-1} + C\left(\frac{y}{x}\right)x^2(x-1)\mathrm{e}^x\\
&+ y(x-1)\frac{1}{x}C'\left(\frac{y}{x}\right)(x-1)\mathrm{e}^x - x^2 C\left(\frac{y}{x}\right)(x-1)\mathrm{e}^x\\
&= 0,
\end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat attendu !
Conclusion. L'ensemble des solutions de l'équation est

$$\left\{(x,y)\mapsto C\left(\frac{y}{x}\right)(x-1)\mathrm{e}^x,\ C\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})\right\}.$$

2. Soient $a_1,\dots,a_n$ des réels distincts, $\varphi_i : \left|\begin{array}{l}\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\\ x\mapsto \exp(a_i x)\end{array}\right.$ pour $1\leqslant i\leqslant n$. Montrer que $(\varphi_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre dans l'espace des fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Correction

Sans perte de généralité, on suppose $a_1<\dots<a_n$. Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ des réels tels que pour tout $x>0$,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathrm{e}^{a_i x} = 0.$$

Par l'absurde, supposons que $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\neq(0,\dots,0)$. Notons k le plus grand entier tel que $\lambda_k\neq 0$. Alors la relation de liaison se réécrit

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathrm{e}^{a_i x} = 0.$$

Or, comme $\lambda_k\neq 0$ et $a_k>a_i$ pour tout $i<k$,

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathrm{e}^{a_i x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda_k \mathrm{e}^{a_k x}.$$

Donc $\lambda_k \mathrm{e}^{a_k x} \underset{x\to+\infty}{\sim} 0$, ce qui signifie que $\lambda_k=0$, absurde ! Donc $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=(0,\dots,0)$, ce qui signifie que la famille est bien libre.

3. Le sous-espace vectoriel des solutions obtenu dans la première question est-il de dimension finie ?

Correction

Supposons que le sous-espace vectoriel de la question 1 soit de dimension finie n. Soient

$a_1, \ldots, a_{n+1}$ des réels distincts. On note

$$f_i : (x, y) \mapsto \mathrm{e}^{a_i \frac{y}{x}}(x-1)\mathrm{e}^x.$$

Alors par l'argument de la question précédente, la famille $(f_1, \ldots, f_{n+1})$ est libre (il suffit de faire le même raisonnement qu'à la question 2, en fixant x). Ceci est absurde car on aurait une famille libre de $n+1$ éléments dans un sous-espace vectoriel de dimension n. Donc le sous-espace vectoriel de la question 1 est de dimension infinie.

Exercice 7. *Mines PC 23*. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que f est homogène de degré n si $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall t > 0, f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. Montrer que f est homogène de degré n si et seulement si $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = nf$.

Correction

- Supposons déjà que f est homogène de degré n. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors pour tout $t > 0$, $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. En dérivant cette expression par rapport à t, on obtient

$$x\partial_1 f(tx, ty) + y\partial_2 f(tx, ty) = nt^{n-1} f(x, y).$$

En évaluant en $t = 1$, on obtient

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = nf(x, y).$$

- Supposons ensuite que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf.$$

On considère alors

$$\varphi : t \mapsto f(tx, ty) - t^n f(x, y).$$

La fonction φ est dérivable et pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned} t\varphi'(t) &= tx\partial_1 f(tx, ty) + ty\partial_2 f(tx, ty) - nt^n f(x, y) \\ &= nf(tx, ty) - nt^n f(x, y) \\ &= n\varphi(t). \end{aligned}$$

Ainsi, φ est solution, sur $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle

$$\varphi'(t) - \frac{n}{t}\varphi(t) = 0,$$

donc on dispose de C telles que

$$\forall t > 0,\ \varphi(t) = Ct^n.$$

En évaluant en 1, on obtient que $C = 0$. Donc φ est nulle, ce qui signifie exactement que f est homogène de degré n.

Exercice 8. *Mines 24*. **1.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. À l'aide d'un changement de variables classique, résoudre l'équation $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$ d'inconnue $f \in \mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R}\right)$.

Correction

Analyse. Soit f une solution. Le seul changement de variables au programme est le changement de coordonnées polaires. On pose

$$g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

On calcule alors

$$\partial_1 g(r,\theta) = \cos(\theta)\partial_1 f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta)\partial_2 f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)),$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} r\partial_1 g(r\theta) &= (r\cos(\theta)\partial_1 f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + (r\sin(\theta))\partial_2 f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \\ &= \alpha g(r,\theta) \end{aligned}$$

Ainsi, on dispose de $C(\theta)$ telle que

$$g(r,\theta) = C(\theta)\mathrm{e}^{\alpha\ln(r)} = r^\alpha C(\theta).$$

Ainsi, on peut écrire

$$f(x,y) = C\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right)\right).(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}} = \varphi\left(\frac{x}{y}\right).(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

La **synthèse** est pour vous.

2. Résoudre $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}f(x,y)$ d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R}\right)$

Correction

Exactement le même raisonnement amène à

$$\begin{aligned} r\partial_1 g(r\theta) &= (r\cos(\theta)\partial_1 f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + (r\sin(\theta))\partial_2 f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \\ &= rg(r,\theta), \end{aligned}$$

donc $g(r,\theta) = C(\theta)\mathrm{e}^r$. Donc

$$f(x,y) = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Exercice 9. *Mines 24*. Soit $J : x \mapsto \displaystyle\int_0^\pi \cos(x\sin(\theta))\mathrm{d}\theta$.

1. Montrer que J est bien définie et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Correction

Il s'agit d'appliquer un théorème de dérivation des intégrales à paramètre. On note $f(x,\theta) = \cos(x\sin(\theta))$. Alors

- pour tout θ dans $[0,\pi]$, $x \mapsto f(x,\theta)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}f(x,\theta) = -\sin(\theta)\sin(x\sin(\theta)), \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}f(x,\theta) = -\sin^2(\theta)\cos(x\sin(\theta)).$$

 nlaillet.math@gmail.com

- pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\theta \mapsto f(x,\theta)$ et $\theta \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x} f(x,\theta)$ sont continues et intégrables sur $[0,\pi]$ (car continues sur cet intervalle),
- pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\theta \mapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(x,\theta)$ est continue sur $[0,\pi]$,
- pour tout x dans $\mathbb{R}$ et $\theta \in [0,\pi]$,
$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(x,\theta)\right| \leqslant 1,$$
qui est continue, intégrable, et indépendante de x.

Donc, d'après le théorème de classe $\mathscr{C}^2$ des intégrales à paramètre, J est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et on a
$$J'(x) = -\int_0^\pi \sin(\theta)\sin(x\sin(\theta))d\theta \text{ et } J''(x) = -\int_0^\pi \sin^2(\theta)\cos(x\sin(\theta))d\theta$$

2. Montrer que J est développable en série entière et déterminer le rayon de convergence.

Correction

On sait que pour tout x dans $\mathbb{R}$ et θ dans $[0,\pi]$,
$$\cos(x\sin(\theta)) = \sum_{p\geqslant 0}(-1)^p \frac{x^{2p}\sin(\theta)^2p}{(2p)!}$$
On fixe alors $x \in \mathbb{R}$ et on note $\varphi_p(\theta) = (-1)^p \dfrac{x^{2p}\sin(\theta)^2p}{(2p)!}$. Alors $\|\varphi_p\|_\infty^{[0,\pi]} = \dfrac{x^{2p}}{(2p)!}$, qui est le théorème général d'une série convergente. Donc la série de fonctions $\sum \varphi_p$ converge normalement donc uniformément, donc
$$J(x) = \int_0^{+\infty}\sum_{p\geqslant 0}\varphi_p(\theta)d\theta = \sum_{p\geqslant 0}\int_0^{+\infty}\varphi_p(\theta)d\theta = \sum_{p\geqslant 0}(-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!}\int_0^\pi \sin^{2p}(\theta)d\theta.$$
On en déduit donc que J est développable en série entière, de rayon de convergence infini.

3. Montrer que $xJ''(x) + J'(x) + xJ(x) = 0$.

Correction

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors
$$J'(x) = \int_0^\pi -\sin(\theta)\sin(x\sin(\theta))d\theta$$
Dans l'intégrale, on fait une IPP, en intégrant $-\sin(\theta)$ en $\cos(\theta)$ et en dérivant

$\sin(x\sin(\theta))$ en $x\cos(\theta)\cos(x\sin(\theta))$. Ainsi,

$$\begin{aligned}J'(x) &= [\cos(\theta)\sin(x\sin(\theta))]_0^\pi - \int_0^\pi \cos(\theta)x\cos(\theta)\cos(x\sin(\theta))d\theta \\ &= -x\int_0^\pi \cos(\theta)^2\cos(x\sin(\theta))d\theta \\ &= -x\int_0^\pi (1-\sin(\theta)^2)\cos(x\sin(\theta))d\theta \\ &= -xJ(x) - xJ''(x)\end{aligned}$$

Donc J est solution de l'équation désirée.

4. Soit $(x,y)\mapsto \varphi(x,y) = J\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ et que $\Delta\varphi + \varphi = 0$.

Correction

Par composée d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$, φ est bien $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. On calcule alors

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}J'(\sqrt{x^2+y^2})$$

et donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,y) &= \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)}\right)J'(\sqrt{x^2+y^2}) + \frac{x^2}{x^2+y^2}J''(\sqrt{x^2+y^2}) \\ &= \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)}J'(\sqrt{x^2+y^2}) + \frac{x^2}{x^2+y^2}J''(\sqrt{x^2+y^2})\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\Delta\varphi(x,y) &= \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)}J'(\sqrt{x^2+y^2}) + \frac{x^2}{x^2+y^2}J''(\sqrt{x^2+y^2}) \\ &+ \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)}J'(\sqrt{x^2+y^2}) + \frac{y^2}{x^2+y^2}J''(\sqrt{x^2+y^2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}J'(\sqrt{x^2+y^2}) + J''(\sqrt{x^2+y^2}).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\Delta\varphi(x,y)+\varphi(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}J'(\sqrt{x^2+y^2}) + J''(\sqrt{x^2+y^2}) + J(\sqrt{x^2+y^2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(J'(\sqrt{x^2+y^2}) + \sqrt{x^2+y^2}J''(\sqrt{x^2+y^2}) + \sqrt{x^2+y^2}J(\sqrt{x^2+y^2})\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

D'où le résultat désiré.

Exercice 10. *Mines 24*. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $\rho : x \mapsto \|x\|^2$.

1. Montrer que $\rho \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Correction

On sait que $\rho(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ donc, par somme et produit de fonctions $\mathscr{C}^\infty$, ρ est $\mathscr{C}^\infty$ donc $\mathscr{C}^2$.

2. Soient $g \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R}\right)$ et $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto f(x) = g\left(\|x\|^2\right)$. Déterminer les fonctions g vérifiant $\Delta f = 0$.

Correction

On va procéder par analyse-synthèse.
Analyse. Soit g une fonction telle que $\Delta f = 0$. On sait, par la règle de la chaîne, que

$$\partial_i f(x_1, \dots, x_n) = 2x_i g'(x_1^2 + \cdots + x_n^2),$$

et donc

$$\partial_i^2 f(x_1, \dots, x_n) = 2g'(x_1^2 + \cdots + x_n^2) + 2x_i^2 g''(x_1, \dots, x_n).$$

Ainsi,

$$\Delta f(x_1, \dots, x_n) = 2ng'(\|x\|^2) + 2\|x\|^2 g''(\|x\|^2).$$

Ceci signifie que pour tout r dans $\mathbb{R}_+^*$,

$$2ng'(r) + rg''(r) = 0,$$

donc

$$g''(r) + \frac{2n}{r} g'(r) = 0,$$

donc on dispose de $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $r > 0$,

$$g'(r) = C\mathrm{e}^{-2n\ln(r)} = \frac{C}{r^{2n}}.$$

Donc on dispose de $D \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $r > 0$,

$$g(r) = -\frac{C}{(2n+1)r^{2n+1}} + D.$$

Donc $g \in \mathrm{Vect}\left(r \mapsto 1, r \mapsto \dfrac{1}{r^{2n+1}}\right)$.
La **synthèse est à peu près immédiate en posant** g **de la sorte.**

Exercice 11. *CCINP PC 24*. Soient $h : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^3 - y^2$ et $C = \{(x, y), h(x, y) = 0\}$.

1. Montrer que h est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, puis montrer que $(0, 0)$ est le seul point critique de h. La fonction h admet-elle un extremum local en $(0, 0)$?

Correction

La fonction h est $\mathscr{C}^1$ car polynomiale. On calcule ensuite les dérivées partielles de h :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = 3x^2$$
$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = -2y$$

Ainsi, (x, y) est un point critique si et seulement si $(x, y) = (0, 0)$.
Pour savoir si h admet un extremum local en $(0, 0)$, on calcule sa hessienne en $(0, 0)$:

$$H_h(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

donc $H_h(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ donc $-H_h \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, mais $-H_h \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$: on ne peut rien dire...
On remarque donc plutôt que $h(x, 0)$ change de signe au voisinage de 0, ce qui assure que h n'admet pas d'extremum local au voisinage de 0.

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(x, y) = 0$ pour tout (x, y) dans C.

(a) Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f\left(t^2, t^3\right) = 0$. En déduire que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.

Correction

Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors en notant $x = t^2$ et $y = t^3$, on remarque que $x^3 - y^2 = 0$, donc $(x, y) \in C$. Ainsi, $f(x, y) = 0$, i.e. $f(t^2, t^3) = 0$.
On dérive ensuite par rapport à t la relation $f(t^2, t^3) = 0$:

$$2t\partial_1 f(t^2, t^3) + 3t^2\partial_2 f(t^2, t^3) = 0,$$

donc, pour tout t dans $\mathbb{R}^*$,

$$2\partial_1 f(t^2, t^3) + 3t\partial_2 f(t^2, t^3) = 0,$$

soit, en faisant tendre t vers 0 et par continuité des dérivées partielles de f, $\partial_1 f(0, 0) = 0$.

(b) Pour $t \in \mathbb{R}$, soit $\varphi_t : u \mapsto f\left(t^2, u\right)$. Justifier que φ_t est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer qu'il existe $\gamma(t) \in]-t^3, t^3[$ tel que $\varphi_t'(\gamma(t)) = 0$

Correction

φ_t est dérivable car f est de classe $\mathscr{C}^1$. On remarque de plus que

$$\varphi_t(-t^3) = f(t^2, -t^3) = 0 \text{ car } (t^2)^3 - (-t^3)^2 = 0, \text{ et } \varphi_t(t^3) = f(t^2, t^3) = 0.$$

Or, φ_t est continue sur $[-t^3, t^3]$, dérivable sur $]-t^3, t^3[$, s'annule en $-t^3$ et en t^3 donc, d'après le théorème de Rolle, on dispose de $\gamma(t)$ dans $]-t^3, t^3[$ tel que $\varphi_t'(\gamma(t)) = 0$.

(c) Conclure que $(0, 0)$ est un point critique pour f.

Correction

On remarque que pour tout u dans $\mathbb{R}$, $\varphi_t'(u) = \partial_2 f(t^2, u)$. Ainsi, le résultat précédent assure que pour tout $t > 0$, il existe $\gamma(t) \in]-t^3, t^3[$ tel que

$$\partial_2 f(t^2, \gamma(t)) = 0.$$

Comme $\gamma(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ par encadrement, et que $\partial_2 f$ est continue, on en déduit que

$$0 = \partial_2 f(t^2, \gamma(t)) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \partial_2 f(0, 0).$$

Ainsi, $(0,0)$ annule les deux dérivées partielles de f, donc $(0,0)$ est un point critique de f.

3. Représenter dans un repère orthonormé l'ensemble C.

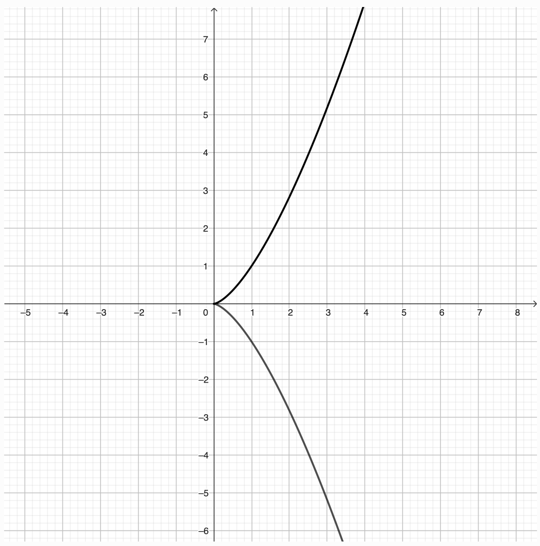
Correction

On est à la frontière frontière du programme… la représentation de courbes paramétrées n'est pas censée être au programme… Cependant, ici, ce n'est pas très compliqué. On remarque que pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}(x,y) \in C &\Leftrightarrow x^3 = y^2 \\ &\Leftrightarrow x \geqslant 0 \text{ et } y = \pm\sqrt{x^3}.\end{aligned}$$

La courbe C est donc la réunion des deux courbes de

$$g : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^{\frac{3}{2}} \end{array} \right. \text{ et } -g : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -x^{\frac{3}{2}} \end{array} \right.$$



3 Fonctions de plusieurs variables : recherche d'extremums

Exercice 12. *Mines-Telecom 24*. **1.** Combien existe-t-il de solutions à l'équation $xe^{-x} = \lambda$ en fonction des valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$?

Correction

On étudie la fonction $\varphi : x \mapsto xe^{-x}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est

$$\varphi' : x \mapsto e^{-x}(1-x),$$

positive sur $]-\infty, 1]$, négative sur $[1, +\infty[$. On a donc les informations suivantes :

- $\varphi(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$ par croissances comparées.
- φ croît strictement sur $]-\infty, 1]$, est nulle en 0, vaut $\dfrac{1}{e}$ en 1

- φ décroît strictement sur $[1, +\infty[$
- $\varphi(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.

Ainsi, φ étant continue, plusieurs applications du TVI (que je ne détaille pas ici) permettent de dire que :

- pour $\lambda \leqslant 0$, l'équation $\varphi(x) = \lambda$ admet une unique solution,
- pour $\lambda = \dfrac{1}{e}$, l'équation $\varphi(x) = \lambda$ admet une unique solution (c'est 1)
- pour $\lambda \in \left]0, \dfrac{1}{e}\right[$, l'équation $\varphi(x) = \lambda$ admet exactement deux solutions.

2. Déterminer les extremums de la fonction $f : (x, y) \mapsto xye^{-x}e^{-y}$.

Correction

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (1 - x)ye^{-x}e^{-y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (1 - y)xe^{-x}e^{-y}$$

donc le seul point critique de f est $(1, 1)$. Mais on sait que

$$f(x, y) = \varphi(x)\varphi(y) \leqslant \varphi(1)\varphi(1) = f(1, 1),$$

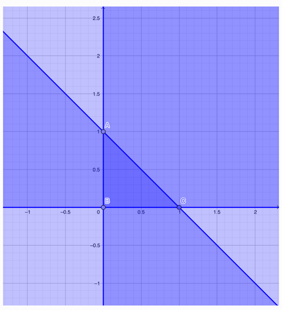
donc f admet un maximum global en $(1, 1)$. Elle n'a pas de minimum sur $\mathbb{R}^2$ (car elle n'a pas d'autre point critique).

Exercice 13. *CCINP PC 23*. Soit $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 1\right\}$. On pose $f : \left| \begin{array}{c} F \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto (x - y)^2 - xy \end{array} \right.$.

1. Montrer que F est un fermé, le dessiner.

Correction

Déjà, F est le triangle suivant



Ensuite, $F = F_1 \cap F_2 \cap F_3$ où

$$F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f_1(x) \geqslant 0\} \text{ en notant } f_1 : (x, y) \mapsto x.$$
$$F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f_2(x) \geqslant 0\} \text{ en notant } f_2 : (x, y) \mapsto y.$$
$$F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f_3(x) \leqslant 1\} \text{ en notant } f_3 : (x, y) \mapsto x + y.$$

Les fonctions f_1, f_2, f_3 sont continues car linéaires en dimension finie, donc F_1, F_2 et F_3 sont des fermés. Ainsi, F est un fermé car c'est une intersection de trois fermés.

2. Trouver les extremums de f.

Correction

On raisonne en plusieurs étapes :

(a) Déjà, F est fermé et borné, et f est continue (car polynomiale en dimension finie) sur le fermé borné F, en dimension finie, donc elle est bornée et atteint ses bornes sur F.
Deux possibilités s'offrent alors à nous pour les extremums : ils sont ou bien dans l'intérieur de F ou bien sur le bord.

(b) **Recherche des points critiques dans l'intérieur de F.** La fonction f est $\mathscr{C}^1$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x-y) - y = 2x - 3y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2(x-y) - x = 2y - 3x.$$

Donc (x,y) est critique si et seulement si $2x-3y=0$ et $-3x+2y=0$, i.e. si et seulement si $x=y=0$. Mais $(0,0)$ n'est pas dans l'intérieur de F, donc on sait que f n'admet aucun point critique dans l'intérieur de F, donc n'admet aucun extremum à l'intérieur.

(c) **f admet donc ses extremums sur le bord.** On cherche donc le maximum et le minimum de f sur chaque côté du triangle.

- sur $[A,B] = \{(0,y), y \in [0,1]\}$, on sait que pour $y \in [0,1]$,
$$f(0,y) = y^2,$$
minimale en $y=0$ (et $f(0,0)=0$) et maximale en $y=1$ (et $f(0,1)=1$)
- sur $[B,C] = \{(x,0), x \in [0,1]\}$, la situation est symétrique.
- sur $[A,C] = \{(x,y), 0 \leqslant x, 0 \leqslant y, x+y=1\} = \{(x,1-x), x \in [0,1]\}$, on a
$$\begin{aligned} f(x,1-x) &= (x-(1-x))^2 - x(1-x) \\ &= (2x-1)^2 - x + x^2 \\ &= 4x^2 - 4x + 1 - x + x^2 \\ &= 3x^2 - 3x + 1 = \varphi(x), \end{aligned}$$
et $\varphi'(x) = 6x-3$, négative sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, nulle en $\frac{1}{2}$, positive sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, donc φ est minimale en $\frac{1}{2}$, maximale en 0 et en 1. De plus,
$$f(0,1) = 1 \text{ et } f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{4} > f(0,0)$$

(d) En conclusion,

- f atteint son minimum en $(0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
- f atteint son maximum en $(0,1)$ et en $(1,0)$, et $f(0,1) = f(1,0) = 1$.

Exercice 14. *CCINP PSI Écrit 2021.*
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. L'objectif de cet exercice est d'étudier l'existence d'extremums pour f.

1. Déterminer les points critiques de f.

Correction

La fonction f est bien de classe $\mathscr{C}^1$ car polynomiale. De plus,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$$

Ainsi, si (x,y) est un point critique de f, alors $x^2 = y$ et $y^2 = x$ donc $x \geqslant 0$ et $x^4 = x$, donc $x = 0$ ou $x = 1$.

- si $x = 0$, alors $y = 0$ et on vérifie bien que $(0,0)$ est critique,
- si $x = 1$, alors $y = 1$ et on vérifie bien que $(1,1)$ est critique.

On a donc trouvé les deux points critiques de f.

2. Expliciter des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrairement proches de $(0,0)$, tels que $f(x,y) < 0$. Expliciter, de même, des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrairement proches de $(0,0)$, tels que $f(x,y) > 0$. La fonction f admet-elle en $(0,0)$ un maximum local, un minimum local ou aucun des deux ?

Correction

On remarque que si l'on pose $x_n = y_n = \dfrac{1}{n}$, alors

$$f(x_n, y_n) = \frac{2}{n^3} - \frac{3}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{3}{n^2},$$

donc $f(x_n, y_n) < 0 = f(0,0)$ pour n assez grand et $(x_n, y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (0,0)$. Ensuite, si l'on pose $a_n = \dfrac{1}{n}$ et $b_n = 0$, alors

$$f(a_n, b_n) = \frac{1}{n^3} > 0 = f(0,0),$$

donc $f(a_n, b_n) > 0$ pour tout n et $(a_n, b_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (0,0)$.
Ainsi, on a exhibé des points arbitrairement proches de $(0,0)$ tels que f soit strictement positive et d'autres tels que f soit strictement négative, ce qui assure que $(0,0)$ n'est pas un extremum local de f.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, g(u,v) = f(1+u, 1+v) - f(1,1)$.

3. Calculer, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $g(u,v)$ puis, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, $g(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Correction

Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned} g(u,v) &= (1+u)^3 + (1+v)^3 - 3(1+u)(1+v) + 1 \\ &= 1 + 3u + 3u^2 + u^3 + 1 + 3v + 3v^2 + v^3 - 3(1 + u + v + uv) + 1 \\ &= 3u^2 + u^3 + 3v^2 + v^3 - 3uv. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}g(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) &= 3r^2\cos(\theta)^2 + r^3\cos(\theta)^3 + 3r^2\sin(\theta)^2 + r^3\sin(\theta)^3 - 3r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\\ &= 3r^2(1-\cos(\theta)\sin(\theta)) + r^3(\cos(\theta)^3+\sin(\theta)^3)\\ &= 3r^2\left(1-\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right) + r^3(\cos(\theta)^3+\sin(\theta)^3)\end{aligned}$$

4. Prouver que pour tout $(r,\theta)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$, on a : $g(r\cos\theta, r\sin\theta)\geqslant 3r^2\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}r\right)$. Que peut-on en conclure ?

Correction

Comme $\sin(2\theta)\leqslant 1$, que $\cos(\theta)^3\geqslant -1$ et $\sin(\theta)^3\geqslant -1$, on en déduit que

$$\begin{aligned}g(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) &\geqslant 3r^2\left(1-\frac{1}{2}\right) - 2r^3\\ &= 3r^2\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}r\right)\end{aligned}$$

Cette quantité est positive pour $r\leqslant\frac{3}{4}$, ce qui assure que sur la boule de centre $(0,0)$ et de rayon $\frac{3}{4}$, g est positive. Ainsi, sur la boule de centre $(1,1)$ et de rayon $\frac{3}{4}$, $f(x,y)\geqslant f(1,1)$, ce qui assure que $(1,1)$ est un minimum local de f.

5. La fonction f possède-t-elle un ou des extremums globaux ?

Correction

On remarque que si f possède un extremum global, c'est nécessairement en $(1,1)$. Or, $f(1,1)=-1$ et $f(-1,-1)=-1-1-3=-5<f(1,1)$ donc f n'atteint pas de minimum global en $(1,1)$.
La fonction f n'a aucun extremum global.

Exercice 15. *Centrale 23*. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, la matrice Hessienne $H_f(x)$ a toutes ses valeurs propres dans $[1,+\infty[$.

1. Pour x fixé dans $\mathbb{R}$ on note $\varphi : t\in\mathbb{R}\mapsto f(tx)$. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^2$ et exprimer φ'' en fonction de la matrice Hessienne de f.

Correction

Comme f est $\mathscr{C}^2$ et $t\mapsto tx$ aussi, φ est $\mathscr{C}^2$.
De plus, φ s'exprime sous la forme $f\circ\gamma(t)$ où $\gamma : t\mapsto tx$. On sait alors que

$$\varphi'(t) = \langle\nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle = \langle\nabla f(tx), x\rangle = \sum_{i=1}^n \partial_i f(tx)x_i$$

Or, la dérivée de $t\mapsto\partial_i f(tx)$ est

$$t\mapsto\sum_{j=1}^n \partial_j\partial_i f(tx)x_j,$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

donc

$$\varphi''(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \partial_j \partial_i f(tx) x_j x_i = x^\top H_f(tx) x.$$

2. En considérant la fonction $\psi : t \mapsto f(tx) - \langle \nabla f(0), tx \rangle - \dfrac{t^2}{2} x^\top x$, montrer l'inégalité

$$f(x) \geqslant f(0) + \langle \nabla f(0), x \rangle + \frac{1}{2} x^\top x$$

Correction

Considérons, comme proposé, $\psi : t \mapsto f(tx) - \langle \nabla f(0), tx \rangle - \dfrac{t^2}{2} x^\top x$. La fonction ψ est deux fois dérivable, et

$$\psi'(t) = \langle \nabla f(tx), x \rangle - \langle \nabla f(0), x \rangle - t x^\top x, \psi''(t) \qquad = x^\top H_f(tx) x - x^\top x.$$

Fixons $t \in \mathbb{R}$. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de $H_f(tx)$. Alors on sait que, si l'on note $(e_1, \ldots, e_n)$ les vecteurs propres associés et qu'on écrit $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, on a

$$\begin{aligned} x^\top H_f(tx) x &= \langle x, H_f(tx) x \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i H_f(tx) e_i \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i e_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2 \\ &\geqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = x^\top x. \end{aligned}$$

Ainsi, ψ'' est positive, donc ψ' croît. Étant nulle en 0, on en déduit que ψ' est négative sur $\mathbb{R}_-$, puis positive sur $\mathbb{R}_+$, donc ψ décroît puis croît, en atteignant donc un minimum en 0. Ainsi, pour tout t dans $\mathbb{R}$, $\psi(t) \geqslant \psi(0)$, ce qui signifie que

$$f(tx) - \langle \nabla f(0), tx \rangle - \frac{t^2}{2} x^\top x \geqslant f(0),$$

donc, en évaluant en 1,

$$f(x) \geqslant f(0) + \langle \nabla f(0), x \rangle + \frac{1}{2} x^\top x.$$

3. En déduire que $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$, puis que f admet un minimum.

Correction

On sait que $x^\top x = \|x\|^2 \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et que, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle \nabla f(0), x\rangle| \leqslant \|\nabla f(0)\|\,\|x\| \underset{\|x\|\to+\infty}{=} o(\|x\|^2),$$

donc

$$f(0) + \langle \nabla f(0), x\rangle + \frac{1}{2}x^\top x \underset{\|x\|\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\|x\|^2 \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc, par minoration,

$$f(x) \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

On en déduit que f admet un minimum. Par la limite précédemment trouvée, on dispose de $M > 0$ tel que pour tout x vérifiant $\|x\| \geqslant M$, $f(x) \geqslant f(0)$.
Ensuite, f est continue sur la boule $B_f(0, M)$, qui **fermé borné**, en dimension finie, donc f admet un minimum sur $B_f(0, M)$, atteint en un point x_m. On a en particulier $f(x_m) \leqslant f(0)$.
Soit maintenant $x \in E$:

- si $x \in B_f(0, M)$, $f(x) \geqslant f(x_m)$.
- si $x \notin B_f(0, M)$, $f(x) \geqslant f(0) \geqslant f(x_m)$.

Ainsi, f atteint bien un minimum global en x_m.

Exercice 16. *Mines PC 23*. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)^x$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 1$.

1. Déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y) = 1$.

Correction

Déjà, $f(0, 0) = 1$. Ensuite, soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) = 1$. Ceci signifie alors que $(x^2 + y^2)^x = 1$, donc que $x \ln(x^2 + y^2) = 0$. Alors

- ou bien $x = 0$,
- ou bien $x^2 + y^2 = 1$, ce qui signifie que (x, y) appartient au cercle de centre 0 et de rayon 1.

Réciproquement, si $x = 0$ ou si $x^2 + y^2 = 1$, on a bien $f(x, y) = 1$.

2. Montrer que f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$.

Correction

Comme exp est croissante, on montre que $(x, y) \mapsto x \ln(x^2 + y^2)$ n'a pas d'extremum local en $(0, 0)$. Ceci est vrai car cette fonction est nulle en $(0, 0)$, positive pour $x < 0$ et $x^2 + y^2 < 1$, négative pour $x > 0$ et $x^2 + y^2 < 1$.

3. Déterminer l'ensemble des points critiques de f sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.

Correction

On fixe $y \in \mathbb{R}$. Alors $x \mapsto f(x,y) = \mathrm{e}^{x\ln(x^2+y^2)}$ est bien dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right)\mathrm{e}^{x\ln(x^2+y^2)}.$$

Pour $y \neq 0$, cette expression est aussi valable pour $x = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 2\ln(y)$.
On fixe $x \in \mathbb{R}$.

- si $x = 0$, alors $f(x,y) = 1$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$,
- si $x \neq 0$, alors $y \mapsto f(x,y)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}\mathrm{e}^{x\ln(x^2+y^2)}$$

Ainsi, si (x,y) est point critique de f,

- ou bien $x = 0$ et alors, nécessairement, $y = 1$,
- ou bien $x \neq 0$ et alors comme $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$, $y = 0$. Mais alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\ln(x^2) + \frac{2x^2}{x^2}\right)\mathrm{e}^{x\ln(x^2)} = (2\ln(|x|)+2)\mathrm{e}^{2x\ln(x)},$$

  donc nécessairement $x = \pm\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Les deux points critiques de f sont donc

$$(0,1), \left(-\frac{1}{\mathrm{e}}, 0\right) \text{ et } \left(\frac{1}{\mathrm{e}}, 0\right)$$

4. Montrer que f admet un unique maximum local et un unique minimum local sur $\mathbb{R}^2$.

Correction

Déjà, on voit que $(0,1)$ n'est pas un extremum local : en effet, pour $\varepsilon > 0$ proche de 0, $f(-\varepsilon,1) < 1$ et $f(\varepsilon,1) > 1$.
Ensuite, pour les deux points restants, on va calculer la hessienne de f (c'est un peu pénible...). Pour $x \neq 0$ et $y \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right)\mathrm{e}^{x\ln(x^2+y^2)} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}\mathrm{e}^{x\ln(x^2+y^2)},$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \left(\frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{4x(x^2+y^2)-4x^3}{(x^2+y^2)^2}\right)\mathrm{e}^{x\ln(x^2+y^2)} + \left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right)^2\mathrm{e}^{x\ln(x^2+y^2)}\\ &= \left(\frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} + \left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right)^2\right)\mathrm{e}^{x\ln(x^2+y^2)}.\end{aligned}$$

De même,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \left(\frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{4yx^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\mathrm{e}^{x\ln(x^2+y^2)} + \left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right)\frac{2xy}{x^2+y^2}\mathrm{e}^{x\ln(x^2+y^2)}$$

Enfin,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2x(x^2+y^2)-4xy^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{e}^{x\ln(x^2+y^2)} + \left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)^2 \mathrm{e}^{x\ln(x^2+y^2)}$$

Ces expressions peuvent faire peur, mais on rappelle qu'on les évalue en $\left(\pm\frac{1}{\mathrm{e}}, 0\right)$. Or, en ce point, on a tous les termes en y qui disparaissent, et, aussi,

$$\mathrm{e}^{x\ln(x^2+y^2)} = (x^2)^x = \frac{1}{\mathrm{e}^{\pm\frac{1}{\mathrm{e}}}}, \text{ ainsi que } \ln(x^2)+2=0.$$

D'où

$$H_f\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}, 0\right) = \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}\begin{pmatrix} -2\mathrm{e} & 0 \\ 0 & -2\mathrm{e}\end{pmatrix}$$

et

$$H_f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}, 0\right) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}\begin{pmatrix} 2\mathrm{e} & 0 \\ 0 & 2\mathrm{e}\end{pmatrix}$$

Donc $-H_f\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}, 0\right) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $H_f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}, 0\right) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, ce qui signifie que f admet un maximum local en $\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}, 0\right)$ et un minimum local en $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}, 0\right)$.

Exercice 17. *Centrale 24*. Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$.

1. Soit $S = \{(x,y,z), z = f(x,y)\}$. Déterminer l'équation du plan tangent à S en un point $(a,b,c) \in S$.

Correction

C'est une question de cours. S est définie par $g(x,y,z) = 0$, où $g(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy - z$.
Par définition, le plan tangent à S est de vecteur normal

$$\nabla f(a,b,c) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a^2}+b \\ -\frac{1}{b^2}+a \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc $M = (x,y,z)$ appartient à S si et seulement si

$$\left\langle \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{a^2}+b \\ -\frac{1}{b^2}+a \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0,$$

c'est-à-dire

$$-\frac{x-a}{a^2} + (x-a)b - \frac{y-b}{b^2} + (y-b)a - (z-c) = 0,$$

ou encore

$$\left(b-\frac{1}{a^2}\right)x+\left(a-\frac{1}{b^2}\right)y-z=\left(b-\frac{1}{a^2}\right)a+\left(a-\frac{1}{b^2}\right)b-c$$
$$=2ab-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-c.$$

2. Montrer que f est minorée puis qu'elle admet un minimum atteint en un point critique que l'on déterminera.

Correction

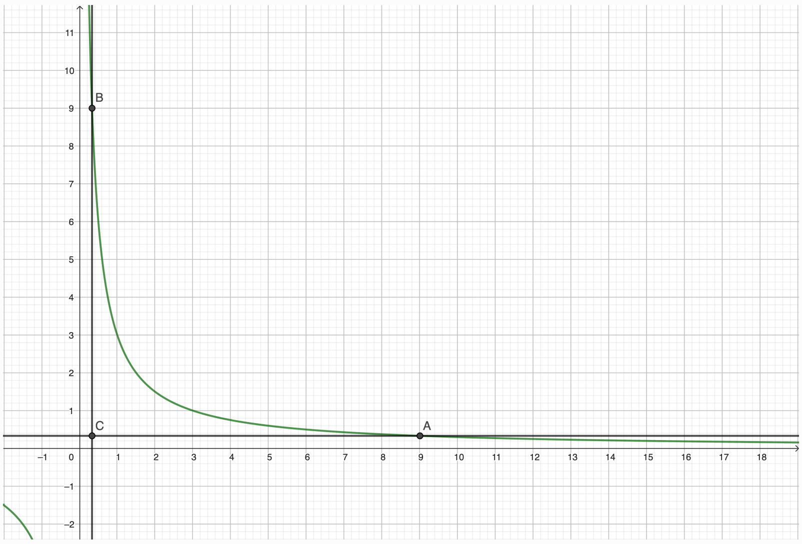
On reconnaît l'exercice sur les fonctions coercives fait dans le chapitre précédent. On remarque que $f(1,1)=3$. Or,

$$f(x,y)\geqslant \frac{1}{x}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\geqslant 3 \text{ si } x\leqslant \frac{1}{3} \text{ et } f(x,y)\geqslant \frac{1}{y}\geqslant 3 \text{ si } y\leqslant \frac{1}{3}.$$

De plus,

$$f(x,y)\geqslant xy\geqslant 3 \text{ si } y\geqslant \frac{3}{x}.$$

On considère alors la zone C délimitée par la droite d'équation $x=\frac{1}{3}$, la droite d'équation $y=\frac{1}{3}$ et l'hyperbole d'équation $y=\frac{3}{x}$ (la zone délimitée par ABC sur le dessin).



Cet ensemble

$$C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\geqslant\frac{1}{3} \text{ et } y\geqslant\frac{1}{3} \text{ et } y\leqslant\frac{3}{x}\right\}$$

est un fermé borné donc f y atteint son minimum. Ce minimum m est supérieur à $f(1,1)=3$ car $(1,1)\in C$. Mais si $(x,y)\notin C$, alors

- ou bien $x\leqslant\frac{1}{3}$ et $f(x,y)\geqslant 3=f(1,1)\geqslant m$.
- ou bien $y\leqslant\frac{1}{3}$ et $f(x,y)\geqslant 3=f(1,1)\geqslant m$.
- ou bien $y\geqslant\frac{3}{x}$ et $f(x,y)\geqslant 3=f(1,1)\geqslant m$.

Donc m est bien minimum global de f.
Ce minimum global est atteint en un point critique de f. Or,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{x^2} + y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{y^2} + x$$

Ainsi, si (x,y) est un point critique de f, alors $y = \frac{1}{x^2}$ et $x = \frac{1}{y^2}$ donc $y = y^4$ soit, comme $y \neq 0$, $y^3 = 1$, donc, comme $y > 0$, $y = 1$. Donc $x = 1$. Donc $(1,1)$ est l'unique point critique de f. Donc le minimum de f est atteint en $(1,1)$ et vaut 3.

Exercice 18. *CCINP PC-PSI 24*. On considère $f : (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} \mapsto x^2y + y(\ln(y))^2$.

1. Déterminer les points critiques de f.

Correction

On calcule les dérivées partielles de f : f est bien $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + (\ln(y))^2 + 2\ln(y)$$

Ainsi, (x,y) est un point critique si et seulement si $x = 0$ et $\ln(y)(\ln(y)+2) = 0$, i.e. $y = 1$ ou $y = \mathrm{e}^{-2}$.
On calcule alors

$$f(0,1) = 0 \text{ et } f(0,\mathrm{e}^{-2}) = 4\mathrm{e}^{-2}.$$

2. Déterminer les extrema locaux et globaux de f.

Correction

On va voir si ces points critiques sont des extrema locaux, en calculant la hessienne de f.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & \frac{2}{y}(\ln(y)+1) \end{pmatrix}$$

En particulier,

$$H_f(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

clairement symétrique positive. Donc f atteint un minimum local en $(0,1)$. Comme f est toujours positive, il s'agit d'un minimum global.
Ensuite,

$$H_f(0,\mathrm{e}^{-2}) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-2} & 0 \\ 0 & -2\mathrm{e}^2 \end{pmatrix},$$

donc ni H_f, ni $-H_f$ n'est dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, donc f n'atteint pas d'extremum local en $(0,\mathrm{e}^{-2})$.
f ne possède pas d'autre point critique et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ est ouvert, donc f n'atteint pas de maximum.

4 Fonctions de plusieurs variables : autres exercices

Exercice 19. *Mines PC 23*. Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $f : E \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que $\forall (x, y, t) \in E^2 \times [0, 1]$, $f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y) - \dfrac{t(1-t)}{2}\|x - y\|^2$.

1. Montrer que, pour $x, y \in E$, $\langle \nabla f(x), y - x\rangle \leqslant f(y) - f(x) - \dfrac{1}{2}\|x - y\|^2$.

Correction

On fixe x et y dans E et on note $\gamma : t \mapsto (1-t)x + ty$ et $\varphi : t \mapsto f((1-t)x + ty) = f \circ \gamma(t)$. L'inégalité de départ permet d'écrire que pour tout t dans $]0, 1]$,

$$\frac{f((1-t)x + ty) - f(x)}{t} \leqslant f(y) - f(x) - \frac{1-t}{2}\|x - y\|^2.$$

Le membre de gauche tend, quand t tend vers 0, vers $\varphi'(0)$. Or, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\varphi'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle = \langle \varphi(t), y - x\rangle .$$

En particulier, $\varphi'(0) = \langle f(x), y - x\rangle$.
Le membre de droite, quant à lui, tend vers $f(y) - f(x) - \dfrac{1}{2}\|x - y\|^2$.
Un passage à la limite dans les inégalités larges permet de conclure.

2. Montrer que, pour $x, y \in E$, $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x\rangle \geqslant \|x - y\|^2$.

Correction

Soient x et y dans E. On vient de démontrer que

$$\langle \nabla f(x), y - x\rangle \leqslant f(y) - f(x) - \frac{1}{2}\|x - y\|^2$$

Donc

$$-\langle \nabla f(x), y - x\rangle \geqslant f(x) - f(y) + \frac{1}{2}\|x - y\|^2 \tag{1}$$

Mais, en échangeant les rôles de x et y, on a aussi

$$\langle \nabla f(y), x - y\rangle \leqslant f(x) - f(y) - \frac{1}{2}\|y - x\|^2.$$

D'où

$$\langle \nabla f(y), y - x\rangle \geqslant f(y) - f(x) + \frac{1}{2}\|y - x\|^2. \tag{2}$$

En sommant (1) et (2), on obtient le résultat désiré !

Exercice 20. *CCINP 21*. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si$(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.

1. Montrer que f est continue.

Correction

Déjà, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ par les théorèmes généraux. Ensuite, on examine la continuité en 0. On utilise pour cela l'inégalité utile :

$$|ab| \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Ainsi, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|f(x,y)| \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2}{2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0,$$

donc f est bien continue en $(0,0)$.

2. Exprimer les dérivées partielles de f.

Correction

On fixe $y \in \mathbb{R}$.

- si $y \neq 0$, $\varphi : x \mapsto f(x,y) = \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)2x}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{3x^4y+3x^2y^3-x^2y^3-y^5-2x^4y+2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \\ &\boxed{= \frac{y\left(x^4+4x^2y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}.}\end{aligned}$$

- si $y=0$, alors $f(x,y)=0$ pour tout x, donc $x \mapsto f(x,y)$ est dérivable et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0$.

De même, on trouve que pour $x \neq 0$ et $y \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{x\left(y^4+4y^2x^2-x^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$$

3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$.

Correction

On montre juste que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue. Cela se passera de la même manière pour l'autre dérivée. On réécrit que pour x et y non nuls,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{y\left(x^4+4x^2y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ &= y - 2\frac{y^5}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

Si $y_0 \neq 0$, les théorèmes généraux assurent que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en (x_0, y_0).

 nlaillet.math@gmail.com

Si $y_0 = 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ et on remarque que

$$y \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\longrightarrow} 0,$$

et

$$\left|\frac{y^5}{(x^2+y^2)^2}\right| = |y|\frac{y^4}{(x^2+y^2)^2} \leqslant |y| \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\longrightarrow} 0,$$

donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est aussi continue en (x_0, y_0).
Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. De même pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, donc f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

4. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Qu'en déduire ?

Correction

On calcule (encore...), en utilisant l'expression

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y - 2\frac{y^5}{(x^2+y^2)^2}.$$

On a alors, pour $(x, y) \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y \partial x}(x, y) &= 1 - 2\frac{5y^4(x^2+y^2)^2 - y^5 2y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4} \\
&= 1 - 2\frac{5y^4(x^2+y^2) - y^5 2y}{(x^2+y^2)^3} \\
&= 1 - 2\frac{5y^4x^2 + 5y^6 - 2y^6}{(x^2+y^2)^3} \\
&= 1 - 2\frac{5y^4x^2 + 3y^6}{(x^2+y^2)^3}.
\end{aligned}$$

De même,

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1 - 2\frac{5x^4y^2 + 3x^6}{(x^2+y^2)^3}.$$

On remarque alors aisément que ces deux quantités sont différentes, donc le théorème de Schwarz est faux, donc f n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$.