CONCOURS COMMUN MINES-PONTS - FILIÈRE PC

Deuxième épreuve de Mathématiques - Concours 2024

Proposition de corrigé

Problème inverse pour les matrices de distance euclidienne

1 Matrices de Hadamard

Par caractérisation des matrices orthogonales, une *matrice de Hadamard* H d'ordre n est une matrice carrée dont tous les coefficients sont égaux à 1 ou -1 et telle que ses lignes, comme ses colonnes, sont deux à deux orthogonales, et forcément de norme euclidienne $\sqrt{n}$: $\dfrac{1}{\sqrt{n}}H$ est orthogonale.

1 ▷ Les deux matrices $\begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1\end{pmatrix}$ sont des $\boxed{\text{matrices de Hadamard d'ordre 1}}$. $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ ainsi que $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ sont orthogonales : $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ sont des $\boxed{\text{matrices de Hadamard d'ordre 2}}$.

2 ▷ Soit H une matrice de Hadamard. Les colonnes C_1 , ..., C_n de $\dfrac{1}{\sqrt{n}}H$, comme ses lignes L_1 , ..., L_n, forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$: toute matrice obtenue en multipliant une ligne ou une colonne par -1 ou en échangeant deux lignes ou deux colonnes de $\dfrac{1}{\sqrt{n}}H$ ne change pas cette condition, comme cela ne change pas que les nouveaux coefficients de cette matrice transformée depuis H a ses coefficients dans $\{-1, 1\}$ donc $\boxed{\text{c'est encore une matrice de Hadamard}}$.

3 ▷ Soit $H = (h_{i,j})$ une matrice de Hadamard d'ordre n. D'après la question précédente, multiplier successivement, pour j de 1 à n, sa $j^{\text{ème}}$ colonne par $h_{1,j}$ de $\{-1, 1\}$, cette nouvelle matrice est encore une matrice de Hadamard d'ordre n dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux aux $(h_{1,j})^2$ donc à 1.

Si $n \geq 2$, la deuxième ligne d'une telle matrice est orthogonale à la première ligne donc elle a autant de 1 et de -1 donc le nombre de colonne, $\boxed{n \text{ est pair}}$.

4 ▷ Soit H est une matrice de Hadamard d'ordre n supérieur ou égal à 4. D'après la deuxième question, il existe une matrice de Hadamard d'ordre n dont tous les coefficients de la première ligne sont uniquement composée de 1 ; n est pair et la deuxième ligne, comme les suivantes, est composée de $n/2$ coefficients égaux à 1 et de $n/2$ coefficients égaux à -1. Quitte à échanger les colonnes pour placer ces 1 sur les $n/2$ premières colonnes, on peut créer une nouvelle matrice de Hadamard d'ordre n dont tous les coefficients de la première ligne sont uniquement composés de 1 et sa deuxième ligne composée de $n/2$ coefficients égaux à 1 puis $n/2$ coefficients égaux à -1.

Si $n \geq 3$, la troisième ligne d'une telle matrice est orthogonale à la première ligne et à la deuxième ligne donc, en particulier, elle a autant de 1 et de -1 dans les $n/2$ premiers coefficients, autant de 1 et de -1 dans les $n/2$ derniers coefficients donc $n/2$ est lui-même pair : $\boxed{n \text{ est un multiple de 4}}$.

2 Quelques résultats sur les endomorphismes symétriques

On note les valeurs propres classées par ordre croissant de f. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on introduit l'ensemble π_k des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de dimension k. On admettra ici que les min et max considérés existent bien (cela découle de la continuité des expressions considérées).

5 ▷ f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ donc, par application du $\boxed{\text{Théorème Spectral}}$, il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de f. On choisit ici une indexation qui respecte l'ordre croissant des valeurs propres.

6 ▷ Soient $k \in [\![1, n]\!]$ et S_k un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension k. $T_k = \mathrm{Vect}\,(e_k, \ldots, e_n)$ est de dimension $n - k + 1$, puisque cette famille est libre, donc d'après la $\boxed{\text{formule de Grassman}}$, on a :

$$\dim\,(S_k \cap T_k) = \dim\,(S_k) + \dim\,(T_k) - \dim\,(S_k \cup T_k) \geq k + (n - k + 1) - n = 1 \Longrightarrow S_k \cap T_k \neq \{0\}\ .$$

7 ▷ Soit $x \in S_k \cap T_k$, non nul ; il existe $\alpha_k, \ldots, \alpha_n$ réels tels que :

$$x = \sum_{j=k}^{n} \alpha_j\, e_j \quad \text{et} \quad (x, f\,(x)) = \left(\sum_{j=k}^{n} \alpha_j\, e_j, \sum_{i=k}^{n} \alpha_i\, \lambda_i\, e_i \right) = \sum_{i=k}^{n} \alpha_i^2\, \lambda_i \geq \sum_{i=k}^{n} \alpha_i^2\, \lambda_k = \lambda_k\, \|x\|^2\ .$$

$$\Longrightarrow \lambda_k \leq \left(\frac{x}{\|x\|}, f\left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right) \leq \max_{y \in S_k\,,\, \|y\|=1} (y, f\,(y))\ .$$

8 ▷ Soit $k \in [\![1, n]\!]$. $S_k = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_k) \in \pi_k$ et, pour tout $x \in S_k$ non nul ; il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ réels tels que :

$$x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j\, e_j \quad \text{et} \quad (x, f\,(x)) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^2\, \lambda_j \leq \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^2\, \lambda_k = \lambda_k\, \|x\|^2 \Longrightarrow \lambda_k \geq \left(\frac{x}{\|x\|}, f\left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right)\ .$$

$$\Longrightarrow \lambda_k \geq \max_{y \in S_k\,,\, \|y\|=1} (y, f\,(y)) \geq \min_{S \in \pi_k} \left(\max_{z \in S\,,\, \|z\|=1} (z, f\,(z)) \right)\ .$$

Donc, par double inégalité, on a :

$$\lambda_k = \min_{S \in \pi_k} \left(\max_{x \in S\,,\, \|x\|=1} (x, f\,(x)) \right)\ .$$

9 ▷ Soit M une matrice symétrique positive de $\mathscr{M}_n\,(\mathbb{R})$. D'après le Théorème Spectral, il existe P de $\mathrm{O}_n\,(\mathbb{R})$ telle que : $P^T\, M\, P$ est la matrice diagonale $\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de valeurs positives. Si on pose $B = P\,\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right)\, P^T$, alors $\boxed{M = B^T \cdot B}$.

On suppose à présent que M, matrice symétrique, admet une unique valeur propre strictement positive λ d'espace propre de dimension 1 et de vecteur propre unitaire u. $A = \lambda\, u \cdot u^T - M$ est alors, par combinaison linéaire, une matrice symétrique réelle telle que :

$$A \cdot u = \lambda\, \|u\|\, u - \lambda\, u = 0 \quad \text{et} \quad \left(\forall v \in E_\lambda^\perp = \bigoplus_{\mu \neq \lambda} E_\mu \right),\ v^T \cdot A \cdot v = -v^T \cdot M \cdot v \geq 0\,.$$

donc, d'après la première partie de la question, il existe $B \in \mathscr{M}_n\,(\mathbb{R})$ telle que $A = B^T \cdot B$ et donc $\boxed{M = \lambda\, u \cdot u^T - B^T \cdot B}$.

3 Caractérisation des MDE

10 ▷

$$P = I_n - \frac{1}{n}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & \dots & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-1/n & 1 & \dots & 1\\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \dots & 1 & 1-1/n\end{pmatrix}.$$

P est symétrique ($P^T = I_n^T - \dfrac{1}{n}\left(\mathbf{e}^T\right)^T\cdot\mathbf{e}^T = P$),

$$P^2 = I_n - \frac{1}{n}\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^T - \frac{1}{n}\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^T + \frac{1}{n^2}\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^T\cdot\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^T = I_n - \frac{2}{n}\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^T + \frac{1}{n^2}\left\|e\right\|^2\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^T = P$$

$$P\cdot\mathbf{e} = \mathbf{e} - \frac{1}{n}\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^T\cdot\mathbf{e} = 0 \quad\text{et}\quad \left(\forall x\in\mathbf{e}^\perp\right)\ P\cdot x = x - \frac{1}{n}\left(\mathbf{e}^T\cdot x\right)\mathbf{e} = x$$

donc l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à P est la $\boxed{\text{projection orthogonale sur } \mathrm{Vect}\,(\mathbf{e})^\perp}$.

11 ▷ Soit $D\in\Delta_n$. Avec les notations proposées :

$$D = (d_{i,j}) = \left(\sum_{k=1}^{n}(x_{i,k}-x_{j,k})^2\right) = \left(\|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 - 2\,x_i^T\cdot x_j\right).$$

$$C\cdot\mathbf{e}^T = \begin{pmatrix}\|x_1\|^2 & \dots & \dots & \|x_1\|^2\\ \vdots & & & \vdots\\ \|x_i\|^2 & \dots & \dots & \|x_i\|^2\\ \vdots & & & \vdots\\ \|x_n\|^2 & \dots & \dots & \|x_n\|^2\end{pmatrix}\quad,\quad \mathbf{e}\cdot C^T = \begin{pmatrix}\|x_1\|^2 & \dots & \|x_j\|^2 & \dots & \|x_n\|^2\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \|x_1\|^2 & \dots & \|x_j\|^2 & \dots & \|x_n\|^2\end{pmatrix}.$$

$$\text{et}\quad M_A^T\cdot M_A = \left(x_i^T\cdot x_j\right)\quad\text{donc}\quad D = C\cdot\mathbf{e}^T + \mathbf{e}\cdot C^T - 2\,M_A^T\cdot M_A\,.$$

Si on suppose, de plus, que $D\in\Delta_n$, on a :

$$\left(T\left(D\right)\right)^T = -\frac{1}{2}P^T\,D^T\,P^T = T\left(D\right)\,,\ T\left(D\right)\cdot\mathbf{e} = -\frac{1}{2}P\,D\,P\cdot\mathbf{e} = -\frac{1}{2}P\,D\cdot 0 = 0$$

d'après la question précédente, et pour tout $v\in\mathrm{Vect}\,(\mathbf{e})^\perp$, $P\cdot v = v$ donc $v^T\,T\left(D\right)\,v = \|M_A\,v\|^2 \geq 0$:

$$v^T\,T\left(D\right)\,v = -\frac{1}{2}v^T\,P^T\,D\,P\,v = -\frac{1}{2}v^T\,D\,v = -\frac{1}{2}\left(v^T\,C\,\mathbf{e}^T\,v + v^T\,\mathbf{e}\,C^T\,v - 2\,v^T\,M_A^T\cdot M_A\,v\right).$$

Ainsi, $T\left(D\right)$ est positive et $\boxed{T\left(D\right)\in\Omega_n}$:

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}^n\right)\ \left(\exists\,(u,v)\in\mathrm{Vect}\,(\mathbf{e})\times\mathrm{Vect}\,(\mathbf{e})^\perp\right)\ x^T\,T\left(D\right)\,x = x^T\,T\left(D\right)\,u + x^T\,T\left(D\right)\,v$$

$$= u^T\,T\left(D\right)\,v + v^T\,T\left(D\right)\,v = \left(T\left(D\right)\,u\right)^T\,v + v^T\,T\left(D\right)\,v = \|M_A\,v\|^2 \geq 0\,.$$

Remarque : on peut directement utiliser la stabilité de $\mathrm{Vect}\,(\mathbf{e})$ et donc de son orthogonal $\mathrm{Vect}\,(\mathbf{e})^\perp$ par $T\left(D\right)$ puisqu'elle est symétrique.

12 ▷

$$\text{Pour toute } A = (a_{i,j}) \in \Omega_n\,,\; K(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & a_{j,j} & \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} - 2\,A$$

donc $K(A) = (a_{i,i} + a_{j,j} - 2\,a_{i,j})$; comme A est symétrique positive, d'après la question 9, il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^T \cdot B$ donc, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \left(B^T\right)_{i,k} B_{k,j}$, soit le produit scalaire des vecteurs lignes BL_i et BL_j de B : $K(A) = \left(\|BL_i\|^2 + \|BL_j\|^2 - 2\,(BL_i, BL_j)\right)$, c'est-à-dire $K(A) = \left(\|BL_i - BL_j\|^2\right)$. Ainsi, on a $\boxed{K(A) \in \Delta_n}$.

13 ▷ D'après la question 10, $P \cdot \mathbf{e} = 0$ et $\mathbf{e}^T \cdot P^T = \mathbf{e}^T \cdot P = 0^T$. Pour tout $A \in \Omega_n$, $K(A) \in \Delta_n$ donc $T \circ K(A) \in \Omega_n$ et, puisque $A \cdot \mathbf{e} = 0$ et $\mathbf{e}^T \cdot A^T = \mathbf{e}^T \cdot A = 0^T$, on a :

$$-\frac{1}{2}\,P\,\left(\mathbf{e}\,\mathbf{a}^T + \mathbf{a}\,\mathbf{e}^T - 2\,A\right)\,P = P\,A\,P = A\,P - \frac{1}{n}\,\mathbf{e}\,\mathbf{e}^T\,A\,P = A - \frac{1}{n}\,\mathbf{e}\,\mathbf{e}^T\,A = A\,.$$

Ainsi, on a : $\boxed{T \circ K = \mathrm{Id}_{\Omega_n}}$.

14 ▷ Soit D une matrice symétrique d'ordre n à coefficients positifs ou nuls et de diagonale nulle.

— Si $D \in \Delta_n$, alors $T(D) \in \Omega_n$ donc $\boxed{-\frac{1}{2}\,P \cdot D \cdot P \text{ est positive}}$ d'après la question 11.

— Réciproquement, si $-\frac{1}{2}\,P\,D\,P$ est positive, le fait que $P \cdot \mathbf{e} = 0$ entraine que $T(D) \in \Omega_n$ et donc que $\boxed{D = K \circ T(D) \in \Delta_n}$.

15 ▷ Soit M une matrice symétrique d'ordre n à coefficients positifs ou nuls et de diagonale nulle, ayant une unique valeur propre strictement positive d'espace propre de dimension 1 et de vecteur propre $\mathbf{e}$ (donc forcément non nulle). D'après la question 9, il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = \lambda\,\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T - B^T \cdot B$.

$-\frac{1}{2}\,P\,M\,P = -\frac{1}{2}\,P\,\lambda\,\mathbf{e}\,\mathbf{e}^T\,P + \frac{1}{2}\,P\,B^T \cdot B\,P = -\frac{1}{2}\,P\,\lambda\,\mathbf{e}\,\mathbf{e}^T\,P + \frac{1}{2}\,P\,B^T \cdot B\,P = \frac{1}{2}\,(B\,P)^T\,(B\,P)$ donc, pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T T(M)\,X = \frac{1}{2}\,\|B\,P\,X\|^2 \geq 0$: $\boxed{T(M) \text{ est positive}}$ et $\boxed{M \text{ est MDE}}$ d'après la question précédente.

4 Spectre des MDE

16 ▷ Soit M est MDE d'ordre n. Les distances sur la diagonale sont nulles donc $\mathrm{Tr}(M) = 0$. Or M est symétrique réelle, donc diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \dots \lambda_n$, pour respecter les notations de l'énoncé ; la trace étant un invariant de similitude, on a donc : $\boxed{\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0}$.

17 ▷ Soit D une MDE d'ordre n non nulle ; D est alors une matrice symétrique d'ordre n à coefficients positifs ou nuls et de diagonale nulle. Soit $x \in \mathrm{Vect}(\mathbf{e})^{\perp}$; $P \cdot x = x$, donc, d'après la question 14 :

$$x^T \cdot D \cdot x = (P \cdot x)^T \cdot D \cdot (P \cdot x) = -2\,x^T \cdot T(D) \cdot x \leq 0\,.$$

18 ▷ Soit D une MDE d'ordre n non nulle. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres, ordonnées dans l'ordre croissant.

On pose $S_{n-1} = (\mathrm{Vect}(\mathbf{e}))^{\perp} \in \pi_{n-1}$; d'après la question précédente, pour tout $x \in S_{n-1}$, $x^T \cdot D \cdot x \leq 0$ donc, d'après le théorème de Courant-Fischer : $\boxed{\lambda_{n-1} \leq \max_{x \in S_{n-1}\,,\,\|x\|=1} \left(x^T \cdot D \cdot x\right) \leq 0}$.

Enfin, D est non nulle donc l'une de ses valeurs propres au moins est non nulle. Puisque $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$,

$\lambda_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i > 0$ (somme de positifs non nulle) : λ_n est $\boxed{\text{l'unique valeur propre strictement positive}}$ de D.

5 Problème inverse pour les MDE

Soit H une matrice de Hadamard d'ordre n et de première ligne constante égale à 1. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels tels que : $\lambda_1 > 0 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ *(il n'est peut-être pas judicieux d'avoir changer l'ordre des valeurs propres !)*. On note U la matrice $\frac{1}{\sqrt{n}} H$, Λ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les λ_i et $D = U^T \cdot \Lambda \cdot U$.

19 ▷ $D^T = U^T \cdot \Lambda^T \cdot \left(U^T\right)^T = U^T \cdot \Lambda \cdot U = D$ donc $\boxed{D \text{ est symétrique}}$. De plus, $U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ donc U est inversible d'inverse U^T donc D est semblable à Λ donc $\boxed{D \text{ a pour valeurs propres } \lambda_1, \ldots, \lambda_n}$, avec $\boxed{\lambda_1 \text{ d'espace propre de dimension } 1}$ puisque c'est une valeur propre simple.

Enfin, pour tous i et j de $[\![1, n]\!]$, le coefficient $d_{i,j}$ de D est :

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \left(U^T\right)_{i,k} (\Lambda \cdot U)_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} u_{k,i}\, \lambda_k\, u_{k,j} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, h_{k,i}\, h_{k,j} = \frac{1}{n} \lambda_1\, h_{1,i}\, h_{1,j} + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \lambda_k\, h_{k,i}\, h_{k,j}$$

$$\Longrightarrow d_{i,j} \geq \frac{1}{n} \lambda_1 + \frac{1}{n} \left(\sum_{k=2}^{n} \lambda_k \right) = 0$$

puisque Λ est une matrice diagonale. On remarque que $d_{i,i} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, h_{1,i}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$, pour tout i de $[\![1, n]\!]$. Ainsi, $\boxed{D \text{ est à coefficients positifs et à diagonale nulle}}$.

20 ▷ On remarque que $\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{e}^T$ est la première ligne de U, orthogonale à toutes les autres, donc :

$$D\, \mathbf{e} = U^T\, \Lambda\, U\, \mathbf{e} = U^T\, \Lambda \begin{pmatrix} \sqrt{n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = U^T \begin{pmatrix} \lambda_1 \sqrt{n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1\, \mathbf{e}$$

donc $\boxed{\mathbf{e} \text{ est vecteur propre de } \lambda_1}$ et $\boxed{D \text{ est MDE}}$ d'après la question 15.

21 ▷ Pour $n = 4$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice de Hadamard d'ordre 4. On pose $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -2$. En accord avec la construction de cette dernière partie, la matrice suivante est une matrice de distance euclidienne d'ordre 4 telle que son spectre soit $\{5, -1, -2, -2\}$:

$$D = U^T\, \Lambda\, U = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 6 & 6 \\ 8 & 0 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 0 & 8 \\ 6 & 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

FIN DU PROBLÈME