

Devoir de révisions de PCSI

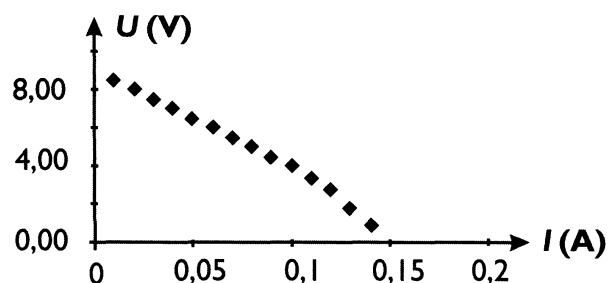
Le sujet est composé de 5 exercices indépendants qui permettent de réviser une partie du programme de première année et, ainsi, de bien commencer la deuxième. Il est à faire et rendre pour le jour de la rentrée.

I. Caractéristiques d'une bobine réelle

On se propose de déterminer les caractéristiques électrocinétiques d'un petit bobinage, modélisé à priori par une inductance pure L en série avec une résistance r ; on dispose pour cela d'un générateur (dit « générateur basse fréquence », ou « GBF »), d'un oscilloscope, de multimètres numériques, de boîtes de résistances à décades et de condensateurs étalonnés de capacités diverses.

I.1 Étude du générateur

- On se place en régime continu. En faisant débiter le générateur dans des résistances réglables, on obtient la caractéristique du générateur suivante :



Déduire de ces mesures un modèle linéaire du générateur en précisant son domaine de validité.

- Calculer alors la tension à vide E_0 , la résistance interne r et le courant de court-circuit I_{cc} .
- Ce générateur alimente un circuit de résistance R ; calculer la valeur minimale de R assurant de ne pas sortir du domaine linéaire.

I.2 Étude du bobinage

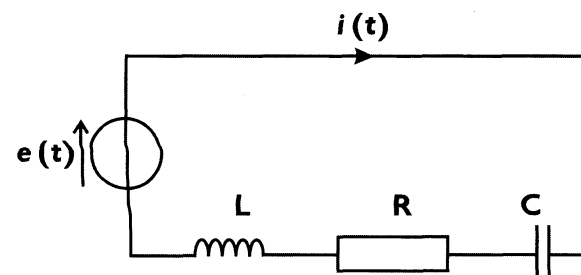
I.2.a Étude rapide

Le grand nombre de spires nécessite une grande longueur de fil, ce qui confère au dipôle une résistance non négligeable. Une mesure au multimètre donne une valeur de $r = 7,9 \Omega$. Le fil de cuivre du bobinage présente une section de l'ordre de 1 mm^2 , et la littérature donne pour le cuivre pur une conductivité $\sigma = 6 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$.

En déduire une estimation de la longueur du fil. En réalité, la longueur de fil est sensiblement inférieure à la valeur calculée; comment le justifier? Les multimètres disponibles ne possédant pas de fonction « inductancemètre », on détermine la valeur de l'inductance L en étudiant la résonance de courant dans un circuit RLC série.

I.2.b Étude théorique

Un circuit RLC série est alimenté par une tension sinusoïdale $e(t)$ de la forme $E_0 \cos(\omega t)$:



En utilisant impédances et notations complexes, déterminer l'amplitude réelle I_0 du courant $i(t)$, en fonction de E_0 , R , L , C , et ω . En déduire l'existence d'une résonance d'intensité. À quelle pulsation le courant est-il en phase avec la tension d'alimentation? La présence d'une résistance r indissociable du dipôle d'inductance L modifie-t-elle cette propriété?

I.2.c Mise en pratique

- (1) grâce au GBF, on alimente en régime sinusoïdal un circuit série $\{R, \text{bobine}(L, r), C\}$;
- (2) on visualise à l'oscilloscope la tension du générateur et celle aux bornes de R ;

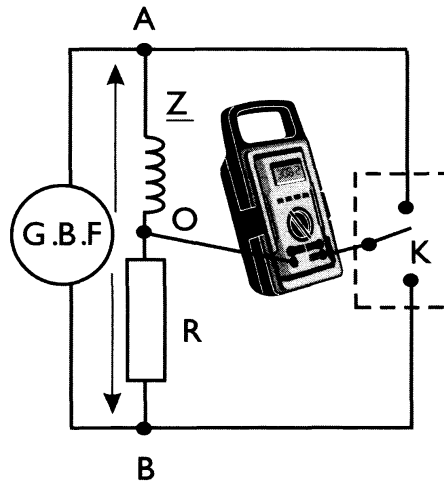
- (3) on détermine expérimentalement la fréquence de résonance de l'intensité du courant;
- (4) on en déduit par calcul la valeur de L .

Répondre aux questions suivantes concernant les opérations décrites :

- 4) Points (1) et (2) : pourquoi l'ordre de branchement des dipôles est-il important? Proposer un montage sur lequel on précisera soigneusement les bornes du GBF et de l'oscilloscope.
- 5) Point (3) : proposer une méthode permettant de déterminer rapidement la fréquence de résonance à l'aide de l'oscilloscope.
- 6) Point (4) : on repère la résonance à la fréquence $f_0 = 774 \text{ Hz}$, avec $C_0 = 470 \text{ nF}$; en déduire la valeur de L .

I.3 Comportement électrocinétique du bobinage à basse fréquence

Soit Z l'impédance complexe du bobinage (on notera $Z = |Z|$). On se propose de tester la validité du modèle $\underline{Z} = r + jL\omega$ grâce au montage suivant :



Le GBF est utilisé en régime sinusoïdal de fréquence f . Le bloc K est un interrupteur à trois bornes qui permet de mesurer soit la valeur efficace V_A de u_{AO} , soit la valeur efficace V_B de u_{BO} .

I.3.a Étude du montage

- 7) Rappeler la définition de la valeur efficace d'un courant ou d'une tension variable. Exprimer Z en fonction de R et des valeurs efficaces V_A et V_B . Quel est le rôle de R ?
- 8) Supposons que l'on dispose d'une série de valeurs $[f, Z(f)]$. Expliquer comment tester par une représentation graphique la validité du modèle $Z = r + jL\omega$ (en fonction de f , non de ω).

I.3.b Mise en pratique

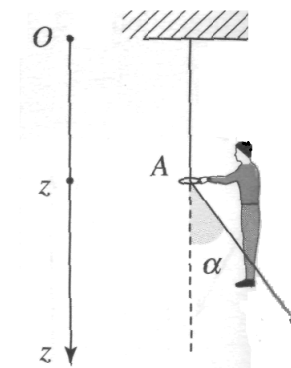
On dispose des résultats de mesures ci-dessous, obtenus pour $R = 500 \Omega$:

f (Hz)	10	20	30	40	50	60	70	80
V_A (mV)	99	146	203	253	317	365	432	492
V_B (V)	5,4	5,3	5,3	5,3	5,4	5,4	5,4	5,4

- 9) Déterminer r et L en expliquant la méthode utilisée; le modèle est-il bien validé?
- 10) Les valeurs mesurées justifient-elles qu'on néglige souvent l'aspect résistif des dipôles inductifs du type bobine?

II. Pendule de longueur lentement variable

Soit un fil inextensible de longueur L auquel est accrochée une masse m ponctuelle.



Un opérateur maintient un petit anneau de masse négligeable à l'altitude z (le fil passe dans cet anneau).

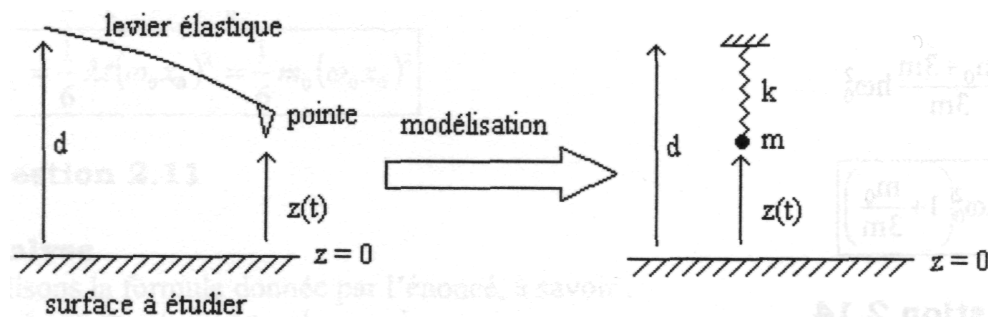
- 1) Étudier le mouvement de la masse m (petites oscillations).
- 2) Exprimer l'énergie de l'oscillateur en fonction de l'amplitude θ_{0z} de ses oscillations.
- 3) On désigne par \vec{R} la force exercée par l'opérateur pour maintenir l'anneau en place.
Montrer que sa moyenne temporelle peut s'écrire :

$$\langle \vec{R} \rangle = mg \frac{\theta_{0z}^2}{4} \vec{e}_z$$

- 4) L'opérateur déplace très lentement l'anneau (temps caractéristique très supérieur à la période des oscillations). En évaluant δW_{op} associé à un déplacement dz de l'anneau, établir une relation liant l'énergie du pendule sa pulsation ω d'oscillation.

III. Microscope à force atomique

Ces dernières années, de nouvelles techniques dites de « microscopies à champ proche » se sont développées pour étudier les surfaces. Parmi ces techniques, le microscope à force atomique permet de déterminer les caractéristiques topographiques, électriques ou magnétiques de la surface étudiée en mesurant la force exercée sur une fine pointe fixée à l'extrémité d'un levier élastique et placée à une distance comprise entre une fraction et quelques dizaines de nanomètres de la surface. Ce problème étudie le comportement mécanique de l'ensemble levier-pointe dans deux modes de fonctionnement classiques du microscope à force atomique. Les deux parties sont largement indépendantes.



Dans tout le problème, on modélise le système levier-pointe par une masse ponctuelle m fixée à un ressort sans masse, de longueur à vide nulle et de raideur k . La

position instantanée de la pointe est notée $z(t)$, l'origine des ordonnées étant prise sur la surface à étudier. On note d la distance entre la surface et l'extrémité du ressort. On suppose de plus que l'interaction pointe-surface est décrite par une énergie potentielle notée $U(z)$. La force correspondante sera notée $F(z)$. On néglige la force de pesanteur.

III.1 Mode contact

En mode dit « contact », lorsque la pointe est approchée de la surface, elle est soumise à une force atomique qui induit une déflexion du levier que l'on peut mesurer optiquement avec une grande sensibilité. On s'intéresse ici à la stabilité des positions d'équilibre de la pointe.

- 1) En supposant d fixée, écrire la condition d'équilibre de la pointe. On note z_0 la position d'équilibre de la pointe.
- 2) Montrer que la condition de stabilité de cet équilibre est :

$$k + \left(\frac{d^2 U}{dz^2} \right)_{z=z_0} > 0$$

- 3) On suppose dans toute la suite de cette partie que $U(z)$ a pour expression :

$$U(z) = \frac{A}{z^7} - \frac{B}{z} \quad \text{avec } A = 1 \cdot 10^{-88} \text{ J} \cdot \text{m}^7 \text{ et } B = 1 \cdot 10^{-29} \text{ J} \cdot \text{m}$$

- a) Représenter précisément les graphes de $U(z)$ et $F(z)$. Commenter.
 - b) Proposer une méthode graphique pour déterminer les positions d'équilibre de la pointe lorsque d est fixée.
 - c) Montrer que lorsque k est supérieur à une valeur critique k_c que l'on déterminera, toutes les positions d'équilibre sont stables, quelle que soit la valeur de d . Évaluer k_c .
- 4) On suppose que la pointe est à l'équilibre à une distance z_0 de la surface telle qu'elle se trouve dans la partie répulsive de la courbe d'interaction ($F(z_0) > 0$). Cet équilibre est-il stable? Montrer qu'une variation δd de la distance d entraîne une variation δz de la distance pointe-surface donnée par :

$$\delta z = \delta d \left[1 - \frac{1}{k} \left(\frac{dF}{dz} \right)_{z_0} \right]^{-1}$$

Évaluer $\frac{1}{k} \left(\frac{dF}{dz} \right)_{z_0}$ pour $z_0 = 0,1 \text{ nm}$ après avoir vérifié qu'une telle position correspond bien à $F(z_0) > 0$. On prendra $k = 100 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. En déduire que

dans de telles conditions, une mesure de l'allongement du ressort lorsqu'on déplace la pointe au-dessus de la surface donne directement la topographie de celle-ci.

III.2 Mode résonnant

En mode résonnant, la pointe est à quelques dizaines de nanomètres de la surface et le levier est excité mécaniquement par une force oscillante d'amplitude F_0 et de pulsation ω . On étudie comment les propriétés dynamiques du levier sont modifiées par l'interaction pointe-surface. On suppose qu'il existe entre la pointe et son environnement une force de frottement dont l'expression est : $-\gamma \frac{dz}{dt}$

5) On suppose dans cette question que la pointe est à une distance de la surface suffisamment grande pour qu'elle ne soit soumise à aucune force de contact.

a) Écrire l'équation du mouvement de la pointe et montrer que l'amplitude a de ses oscillations a pour expression :

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\gamma^2\omega^2}{m^2}}} \quad \text{où } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Dans toute la suite, on suppose que la force de frottement subie par la pointe est faible de sorte que : $\frac{m\omega_0}{\gamma} \gg 1$

b) Montrer que l'amplitude des oscillations de la pointe présente une résonance à une fréquence que l'on déterminera (on donnera ω_r pulsation de résonance). Préciser l'amplitude au maximum A_0 . Nous admettrons qu'à mi-hauteur de la courbe de résonance, la variation avec la fréquence de l'amplitude de vibration est bien décrite par :

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

6) On suppose maintenant que la pointe est soumise à l'interaction avec la surface décrite par l'énergie potentielle $U(z)$ et la force $F(z)$.

a) Écrire l'équation du mouvement de la pointe.

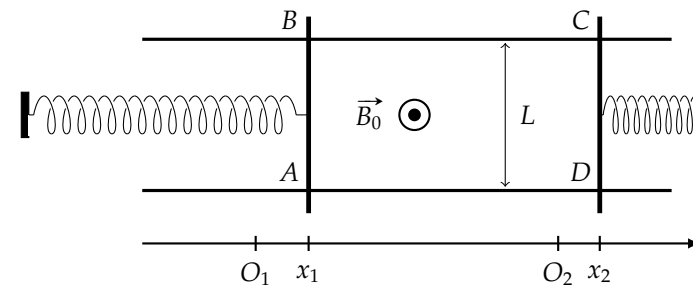
b) En linéarisant cette équation autour de la position d'équilibre de la pointe z_0 , montrer que la présence d'une interaction est équivalente à une modification de la raideur du ressort et qu'elle induit un changement de fréquence de résonance donné par $\Delta\omega_0 = -\frac{\omega_0}{2k} \left(\frac{dF}{dz} \right)_{z=z_0}$ lorsque $k \gg$

$\left(\frac{dF}{dz} \right)_{z=z_0}$ En supposant que la pointe est suffisamment loin de la surface

pour que le changement de fréquence $\Delta\omega_0$ soit faible devant la largeur à mi-hauteur de la courbe de résonance, tracer sur un même graphe les courbes de résonance obtenues en l'absence puis en présence d'interaction.

IV. Barres couplées

On considère deux rails conducteurs parallèles horizontaux distant de L (voir la figure ci-dessous). Sur ces rails sont posés transversalement deux barres AB et CD de même masse m , la résistance électrique du circuit $ABCD$ ainsi formé est notée R (on suppose qu'elle reste constante). Les barres sont ramenées vers leurs positions d'équilibre (notées O_1 et O_2) par des ressorts de raideur k . On note $x_1(t)$ et $x_2(t)$ les positions des barres par rapport à leur positions d'équilibre respectives. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique vertical \vec{B}_0 , permanent et uniforme. On néglige le phénomène d'auto-induction et on néglige tous les frottements mécaniques.



1) En exécutant le script python¹ déterminer l'amplitude des oscillations en régime permanent en prenant des vitesses initiales v_1 et v_2 nulles et les elongations initiales suivantes (unité arbitraire) :

cas 1 : $x_1=1$ et $x_2=-1$ cas 2 : $x_1=1$ et $x_2=1$ cas 3 : $x_1=1$ et $x_2=0$ cas 4 : $x_1=0$ et $x_2=1$

Sans faire de calcul, expliquer les amplitudes finales obtenues dans les cas 1 et 2. Pour les cas 3 et 4, avec un raisonnement physique, prévoir le sens dans lequel la barre initialement immobile commence à se déplacer.

1. https://cahier-de-prepa.fr/pc*-pasteur/download?id=2389

- 2) a) Établir les équations couplées du mouvement des deux barres :

$$\ddot{x}_1 + \frac{k}{m}x_1 = \frac{B_0^2 L^2}{mR}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad \text{et} \quad \ddot{x}_2 + \frac{k}{m}x_2 = -\frac{B_0^2 L^2}{mR}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

- b) Trouver un changement de variables simple qui permet de découpler les équations (les solutions des équations découplées sont appelées « modes propres » du système).
- c) Commenter les équations du mouvement vérifiées par les nouvelles variables. Déterminer l'expression du facteur de qualité pour le mode propre amorti. Quelle est la durée caractéristique du régime transitoire ?
- d) Avec un minimum de calculs, déterminer les amplitudes finales obtenues dans les cas 3 et 4.
- 3) On considère maintenant des conditions initiales quelconques, avec des vitesses initiales v_1 et v_2 non nulles. Avec un minimum de calculs, déterminer l'amplitude des oscillations en régime permanent en fonction des conditions initiales. (On pourra raisonner sur l'énergie mécanique du mode symétrique)
Vérifier votre résultat à l'aide du script python sur quelques cas bien choisis.

V. Incertitudes par temps de pluie

On réalise l'expérience simple consistant à mettre deux bassines dehors sous la pluie et à mesurer la quantité d'eau de pluie récupérée après quelques heures de mauvais temps. La bassine 1 est de forme carrée de côté 14,5 cm, tandis que la bassine 2 est circulaire de diamètre 29,0 cm. Ces longueurs sont mesurées à 0,5 cm près. On note les masses d'eau recueillie par chaque bassine :

Bassine 1	Bassine 2
72 g	222 g

Les masses sont mesurées à 5 g près avec la balance de la cuisine.

- 1) Montrer que le rapport des masses d'eau dans chaque bassine permet de déterminer une valeur expérimentale du nombre π , notée dans la suite π_{exp} .

On souhaite évaluer l'incertitude-type sur cette mesure. On va pour cela simuler des valeurs expérimentales à l'aide de tirages aléatoires par la méthode de MONTE-CARLO².

² La méthode de MONTE-CARLO (adapté de « www.wikipedia.fr ») : La méthode de MONTE-CARLO désigne une famille de méthodes algorithmiques visant à calculer une

On pourra utiliser l'instruction `np.random.uniform(-1, 1, N)` qui renvoie un tableau de N nombres aléatoires compris entre -1 et 1 avec une distribution uniforme. On rappelle que `np.mean(x)` et `np.std(x, ddof=1)` renvoient respectivement la moyenne et l'écart-type des valeurs contenues dans un tableau x . L'instruction `plt.hist(x, bins = 100)` permet de tracer l'histogramme des valeurs contenues dans x réparties en 100 intervalles.

On note m_l la masse d'eau mesurée dans la bassine 1 et Δm_l son incertitude. Celle-ci est en fait une estimation raisonnable de la demi-largeur de l'intervalle de valeurs possibles de la masse d'eau recueillie, due à la variabilité de la grandeur étudiée suite au protocole de mesure ou à la précision de l'instrument utilisé pour effectuer la mesure.

- 2) Créer un tableau de N valeurs aléatoires de la masse d'eau contenue dans la bassine 1 choisies uniformément dans l'intervalle $[m_l - \Delta m_l; m_l + \Delta m_l]$ et représenter l'histogramme correspondant. Évaluer l'incertitude-type $u(m_1)$ sur la masse m_1 , définie comme l'écart-type de la distribution. Quelle relation simple lie $u(m_1)$ et Δm_1 ? Quel nom courant donne-t-on à ce type d'évaluation. On pourra prendre $N = 1\,000\,000$.

On choisit ainsi aléatoirement tous les paramètres du problème, c'est-à-dire à la fois les masses d'eau recueillie et la taille des bassines, dans chaque intervalle de variabilité.

- 3) Créer un tableau contenant N valeurs expérimentales de π_{exp} obtenues avec N valeurs aléatoires des masses d'eau et de la taille des bassines et représenter l'histogramme correspondant. En déduire l'incertitude-type sur la mesure expérimentale de π_{exp} . Comparer la valeur de π_{exp} obtenues à partir des mesures et la moyenne des valeurs aléatoires calculées. Donner la valeur numérique de i_{exp} avec le bon nombre de chiffres significatifs.

Pour valider une mesure expérimentale, les laboratoires de recherche scientifique utilisent la notion d'écart normalisé (ou Z-score) par rapport à une valeur de référence défini par :

$$Z = \frac{x - x_{\text{ref}}}{u(x)}$$

valeur numérique approchée en utilisant des procédés aléatoires, c'est-à-dire des techniques probabilistes. Le nom de ces méthodes, qui fait allusion aux jeux de hasard pratiqués au casino de MONTE-CARLO, a été inventé en 1947 par Nicholas METROPOLIS et Stanislaw ULAM. Les méthodes de MONTE-CARLO sont particulièrement utilisées pour calculer des intégrales en dimensions plus grandes que 1 (en particulier, pour calculer des surfaces et des volumes). Elles sont également couramment utilisées en physique des particules, où des simulations probabilistes permettent d'estimer la forme d'un signal ou la sensibilité d'un détecteur. La comparaison des données mesurées à ces simulations peut permettre de mettre en évidence des caractéristiques inattendues, par exemple de nouvelles particules.

où x est la valeur mesurée, x_{ref} est la valeur de référence (le plus souvent la moyenne des valeurs obtenues) et $u(x)$ l'écart-type de la distribution des valeurs de x :

- Lorsque $|Z| \leq 2$, le résultat de la mesure est acceptable.
 - Lorsque $2 < |Z| \leq 3$, la mesure nécessite une attention particulière, notamment si cette situation se reproduit souvent.
 - Lorsque $|Z| > 3$, la mesure doit être rejetée et on recherche alors les causes possibles de cette anomalie.
- 4) Calculer l'écart normalisé de la mesure expérimentale en prenant comme référence la valeur théorique de π . La mesure obtenue est-elle acceptable ?

Il existe des relations donnant l'incertitude-type sur une grandeur composée connaissant l'incertitude-type sur les grandeurs intermédiaires. On a ainsi par exemple :

Grandeur	Incertitude-type
x, y	$u(x), u(y)$
$z = ax + by$	$u(z) = \sqrt{(au(x))^2 + (bu(y))^2}$
$z = ax^\alpha y^\beta$	$\frac{u(z)}{z} = \sqrt{\left(\alpha \frac{u(x)}{x}\right)^2 + \left(\beta \frac{u(y)}{y}\right)^2}$

- 5) Exprimer l'incertitude-type sur π_{exp} en fonction des incertitudes-types sur les différents paramètres de l'expérience. Comparer le résultat numérique à la valeur obtenue par la méthode de MONTE-CARLO. Commenter.

La méthode de MONTE-CARLO peut aussi permettre de calculer des surfaces. On se propose de simuler la pluie par des tirages aléatoires bidimensionnels pour déterminer la valeur de π . On considère le disque de rayon R , contenu dans un carré de côté $2R$. Comme les gouttes de pluie récupérées par chaque bassine, on choisit aléatoirement et uniformément des points dans le carré. La probabilité qu'un point soit contenu dans le disque est alors égale au rapport de la surface du disque sur la surface du carré.

- 6) Exprimer la probabilité théorique qu'un point choisi aléatoirement dans le carré soit contenu dans le disque.
- 7) Écrire la fonction Python d'entête `def experience(Ntirages)` : qui renvoie une valeur expérimentale de π par la méthode de MONTE-CARLO après un nombre `Ntirages` de tirages dans le carré.
- 8) Comparer les mesures obtenues avec 100, 1 000 et 10 000 tirages en traçant les histogrammes représentant la répartition de 1 000 valeurs. Quel est le rôle du nombre de tirages dans l'expérience numérique ainsi réalisée ? Comparer les incertitudes-types relatives à chaque expérience.

On pourra rajouter l'option `range=(2.8,3.5)` dans `plt.hist()` pour tracer l'histogramme dans l'intervalle fixe `[2.8,3.5]` afin de mieux comparer les résultats.

Il est d'usage de tracer l'écart normalisé pour les différentes mesures expérimentales par rapport à leur valeur moyenne pour détecter les éventuelles anomalies. On considère une série de 10 000 points de mesures obtenus avec des expériences à 1 000 tirages aléatoires.

- 9) Tracer l'écart normalisé relatif à ces 10 000 mesures et l'histogramme de la distribution des valeurs entre -5 et 5 . Commenter.
- 10) Déterminer la probabilité d'avoir un Z-score $|Z| \leq 2$ et commenter le critère d'acceptabilité d'une mesure expérimentale.