Bienvenue en PCSI au lycée Gustave Monod

Chèr·e futur·e étudiant·e,
Vous avez été admis·e en classe préparatoire aux grandes écoles (CPGE). Toute l'équipe pédagogique de PCSI vous recevra le jour de la rentrée des classes le 2 septembre. Il est bien sûr important que vous preniez du temps pour vous reposer après votre baccalauréat, mais si vous voulez réussir, il est aussi important de bien vous préparer à la rentrée. Pour vous y retrouver dans les révisions ou les mises à niveau, nous vous avons préparé ce document qui contient les principales informations et conseils pour aborder sereinement la rentrée en classe préparatoire.
Un premier conseil est de réfléchir pendant les vacances à votre projet professionnel. Quel métier envisagez-vous ? Ingénieur peut-être, mais dans quel domaine ? Quelle école souhaitez-vous intégrer ? Et quels sont les domaines scientifiques qui vous intéressent le plus ? Renseignez-vous, car si vous avez l'objectif en tête, il sera plus facile de fournir tous les efforts nécessaires pour l'atteindre.
Bonnes vacances, et rendez-vous en septembre.

L'équipe de PCSI.

Mathématiques – Exercices de révision – devoirs de vacances

Dans la première partie du programme de mathématiques, vous reverrez des notions que vous avez pour la plupart déjà abordées dans le secondaire, mais sous un œil radicalement différent. Il faudra dès la rentrée que vous sachiez faire des calculs de façon méthodique et efficace. C'est un des points qui fera la différence dès le début alors consacrez-y du temps.
L'outil mathématique vous servira dans toutes les autres matières scientifiques : physique, chimie, sciences industrielles, informatique. Dans ce document sont inclus des exercices de niveaux variés, jusqu'au programme de terminale : calculs élémentaires, résolution d'équations, dérivées, primitives, trigonométrie... Nous vous conseillons d'y passer un temps conséquent. Un corrigé partiel est proposé page 13.

Un formulaire de l'essentiel des formules et notions mathématiques à savoir en rentrant en première année de prépa est fourni page 6 et suivantes. Apprenez-le ou révisez-le soigneusement si vous ne connaissez pas déjà ces notions.

Vous présenterez tous les calculs intermédiaires sur votre copie et rédigerez le plus soigneusement possible.

Un polycopié "manuel de bonne rédaction mathématique" est disponible sur le site cahier-de-prepa.fr/pcsi-monod pour vous aider à bien rédiger. Je vous conseille vivement sa lecture !

I Calculs algébriques

Dans les calculs ci-dessous, effectuer les opérations avec les fractions les plus simples possibles et exprimer les résultats sous forme de fraction avec un dénominateur entier lorsque cela est possible. Exemple : $\frac{1}{48}-\frac{1}{80}$ ne se fera ni à la calculatrice ni sous la forme $\frac{80-48}{48\times 80}$ car 48 et 80 ont un multiple commun bien plus petit que leur produit :

$$\frac{1}{6\times 8}-\frac{1}{8\times 10}=\frac{5-3}{8\times 3\times 2\times 5}=\frac{1}{120}.$$

La calculatrice pourra néanmoins servir à vérifier la justesse de certains résultats.

☐ **Exercice 1 :** Simplifier $A=\frac{1}{120}+\frac{1}{45}+\frac{3}{20}+\frac{1}{36}$.

☐ **Exercice 2 : Exemple de calculs apparaissant en probabilités.**

Simplifier : $p=\dfrac{\frac{4}{10}\times\frac{1}{50}}{\frac{4}{10}\times\frac{1}{50}+\frac{2}{3}\times\frac{15}{50}+\frac{1}{3}\times\frac{34}{50}}$ et $q=\dfrac{\frac{2}{10}\times\frac{4}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{5}{10}+\frac{1}{100}}{\frac{2}{10}\times\frac{4}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{5}{10}+\frac{1}{100}+\frac{3}{10}\times\frac{2}{10}}$

☐ **Exercice 3 : Fractions de nombres non entiers.**
Soit $u\in\mathbb{R}$. Simplifier :

$$A=\frac{1}{u^2+3u+2}+\frac{1}{u^2-1}+\frac{-2}{u^2+u}-\frac{1}{u^2+u-2}$$

☐ **Exercice 4 : Inéquations.**
Résoudre l'inéquation d'inconnue x réelle : $\frac{3}{x}\leqslant -5$. (*en se souvenant que lorsqu'on multiplie une inégalité par un nombre négatif, on change son sens...*)

☐ **Exercice 5 : Racines et expressions conjuguées.**
Écrire avec un dénominateur entier :

$$A=\frac{1}{\sqrt{3}+1}\quad;\quad B=\frac{1-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^2}\quad;\quad C=\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

☐ **Exercice 6 :** Factoriser les expressions suivantes sans utiliser le discriminant :

$$A=x^2+3x\ ;\quad B=x^2-9\ ;\quad C=4x^2-9\ ;\quad D=4x^2+25\ ;\quad E=49x^2+21x+\frac{9}{4}\ ;\quad F=x^2+5x+6.$$

☐ **Exercice 7 :** Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 3y & = & 2 \\ 2x & - & 5y & = & 7 \end{array}\right.$.

☐ **Exercice 8 : Démonstration par récurrence**

Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

II Calculs analytiques

☐ **Exercice 9 :** Simplifier chacune des expressions suivantes :

$$A=\frac{e^3\times e^{-1}}{e^7}\quad;\quad B=\frac{(e^{-2})^3\times e^{-5}}{(e^2)^2}\quad;\quad C=\frac{e^{2\ln(3)}}{e^{3\ln(2)}}\quad;\quad D=\ln\left(\frac{e^5}{e^3}\right)$$

☐ **Exercice 10 :** Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

(a) $e^{3x+1}=e^x$ (b) $e^{x(x+1)}=1$

(c) $e^{3x-1}\leqslant e^{2x}$ (d) $e^{3x-1}=3$

(e) $\ln(1+3x)=\ln(x+1)$ (f) $\ln(x-1)+\ln(2-x)=\ln(6x)$

☐ **Exercice 11 : Fonctions usuelles**

1. Donner les limites en $+\infty$, $-\infty$ et en 0 (à droite ou à gauche) des fonctions données par les expressions suivantes : $\exp(x)$, $\ln(x)$, $1/x$, x^2, $\sqrt{x}$.
2. Trouver une expression de la dérivée de chacune des applications dont on donne ici l'expression au moyen de la variable x : $1/x$, $(ax+b)^n$, $\sqrt{x}$, $\ln(ax+b)$, $\exp(x^2)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$.
3. Pour les fonctions données ici par leur expression, trouver leurs primitives : $\exp(ax)$, $1/x$, x^α, $\sin(x)$, $\cos(x)$
4. Simplifier les expressions suivantes : $\dfrac{\exp(2a+3b)\exp(-a-b)}{\exp(a+b)}$, $\ln(a^2)-\ln(a)$, $\exp(-\ln(a))$, $\dfrac{(x^2)^3}{x^{-1}.x^2}$.

☐ **Exercice 12 :** Pour chacune des fonctions numériques suivantes, donner son domaine de définition, préciser en quels points elle est dérivable et calculer sa dérivée en ces points :

(a) $x\mapsto x^3-x^2$ (b) $x\mapsto\dfrac{x^2-3}{x+1}$ (c) $x\mapsto xe^{-x}$

(d) $x\mapsto\sqrt{x^2+2x-1}$ (e) $x\mapsto\ln(x^2+x+1)$ (f) $x\mapsto\dfrac{(2x+1)^3}{x+1}$

(g) $x\mapsto e^x\sqrt{1-x}$ (h) $x\mapsto\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ (i) $x\mapsto e^{wx}-x$, où $w\in\mathbb{R}$ est fixé.

☐ **Exercice 13 :** Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle indiqué :

(a) $I=\mathbb{R}$, $f:x\mapsto 2x$ (b) $I=\mathbb{R}$, $f:x\mapsto 6x^{11}-8x^3$

(c) $I=]0,+\infty[$, $f:x\mapsto 1-\dfrac{1}{x^2}$ (d) $I=]-\infty,2[$, $f:x\mapsto\dfrac{1}{x-2}$

(e) $I=]-\dfrac{3}{2},+\infty[$, $f:x\mapsto\dfrac{1}{(2x+3)^5}$ (f) $I=]1,+\infty[$, $f:x\mapsto\dfrac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$

☐ **Exercice 14 : Décomposition en éléments simples.**

1. Déterminer des réels a et b tels que, pour tout x différent de $+1$ et -1, on ait :
$$\frac{4x-5}{x^2-1}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}.$$
2. Calculer alors l'intégrale $\displaystyle\int_3^5\frac{4x-5}{x^2-1}\,dx$.

☐ **Exercice 15 : Équations Différentielles.** On suppose que f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et qu'il existe une fonction a continue sur I vérifiant, pour tout t dans I : $f'(t)=a(t)f(t)$.

1. Rappeler pourquoi a admet au moins une primitive sur I. On note A une telle primitive.
2. Démontrer que $F:t\mapsto f(t)e^{-A(t)}$ est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

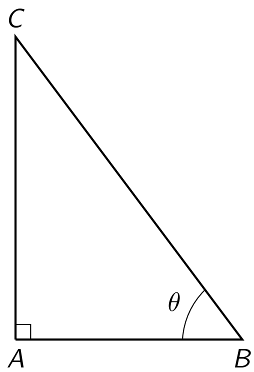
3. En déduire qu'il existe un réel K tel que, pour tout réel t appartenant à I, $f(t) = Ke^{A(t)}$.
4. Application : dans chacun des cas suivants, déterminer toutes les fonctions f vérifiant l'égalité proposée sur l'intervalle I indiqué :
   (a) $I = \mathbb{R}$, $f'(t) = 3f(t)$ (b) $I = \mathbb{R}^+$, $f'(t) = -\frac{1}{2}f(t)$
   (c) $I = \mathbb{R}$, $f'(t) = 2tf(t)$ (d) $I = [1,2]$, $f'(t) = \frac{1}{t}f(t)$

□ **Exercice 16 : Étude de fonctions.** Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto x^3 - 4x^2 + 1$.

1. Étudier les variations de f et représenter son graphe.
2. Écrire l'équation de la tangente à f aux points d'abscisse 0, 1, et aux points où la tangente est horizontale. Tracer ces tangentes en rouge sur la figure. Donner les abscisses des points où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$.
3. Discuter, en fonction du paramètre $b \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = b$.

III Trigonométrie

□ **Exercice 17 : Les bases.**



1. Soit le triangle rectangle ABC de la figure ci-contre. Exprimer le cosinus et le sinus de l'angle θ en fonction des longueurs AB, BC et AC.
2. Placer les angles suivants sur le cercle trigonométrique (angles en radians) : $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{3\pi}{4}$.
3. Placer les angles dont le cosinus vaut $1/3$ et ceux dont le sinus vaut $-1/4$.
4. Exprimer les cosinus et sinus suivants en fonction de $\cos\theta$ ou de $\sin\theta$: $\cos(-\theta)$, $\sin(-\theta)$, $\cos(\pi-\theta)$, $\cos(\theta+\pi)$, $\sin(\pi-\theta)$, $\sin(\pi+\theta)$, $\cos(\pi/2+\theta)$, $\sin(\pi/2+\theta)$,
   $\cos(\pi/2-\theta)$, $\sin(\pi/2-\theta)$
5. $\cos^2 x + \sin^2 x =$? $\cos^2 x - \sin^2 x =$?

□ **Exercice 18 : Un exercice très utile.** Soit α dans $\mathbb{R}$ fixé et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \cos(\alpha - x)\cos(x) - \sin(\alpha - x)\sin(x).$$

1. Calculer la dérivée de f. En déduire que f est constante.
2. Soient a et b dans $\mathbb{R}$. On pose $\alpha = a + b$. En quelles valeurs de x évaluer f pour obtenir la formule :
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \text{ ?}$$
3. Comment choisir α et x pour obtenir la formule :
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \text{ ?}$$
4. Retrouver de la même façon les formules pour sinus :
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a), \qquad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a).$$
5. On considère la fonction tangente $\tan : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Déterminer son domaine de définition.
6. Soient a et b deux réels. Démontrer à l'aide des questions précédentes les formules suivantes :
$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}.$$
   et préciser pour quelles valeurs de a et b ces formules sont valables.
7. Tracer sur une même figure les graphes des fonctions cos et sin. Expliquer comment interpréter les formules suivantes sur les graphes des deux fonctions. Pour tout réel x :
$$\sin(\pi - x) = \sin(x) \ ; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \ ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x).$$

8. Résoudre l'équation suivante d'inconnue réelle x :

$$2\cos(2x) + 4\cos(x) + 3 = 0.$$

☐ **Exercice 19 : La suite.** Soient a et b deux réels. On pose $u = \dfrac{a+b}{2}$ et $v = \dfrac{a-b}{2}$.

1. Calculer $u+v$ et $u-v$. En déduire les formules suivantes :

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \qquad \cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \qquad \sin a - \sin b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

2. Montrer les formules suivantes :

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\Big[\cos(a-b) + \cos(a+b)\Big] \qquad \sin a\sin b = \frac{1}{2}\Big[\cos(a-b) - \cos(a+b)\Big]$$

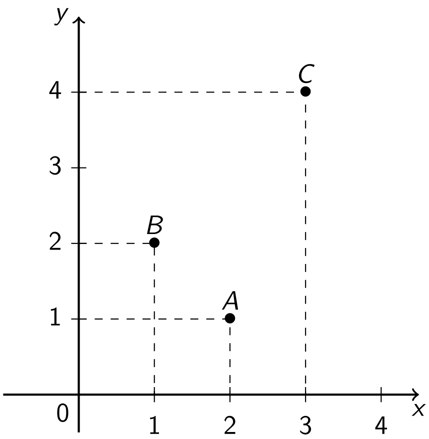
$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}\Big[\sin(a-b) + \sin(a+b)\Big]$$

3. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x réelle :

$$(a)\ \sin(2x) + \sin(6x) = \sin(4x)\ ; \quad (b)\ \cos(x)\cos(7x) = \cos(3x)\cos(5x).$$

IV Un peu de géométrie

☐ **Exercice 20 : Géométrie analytique**



1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (Figure ci-contre.)

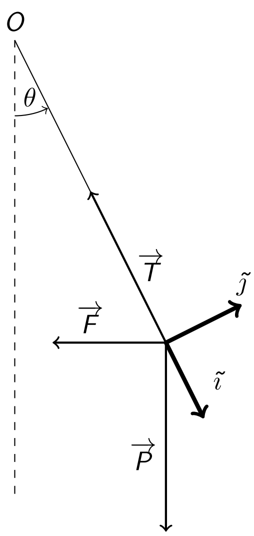
2. En déduire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$.

3. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

4. Que peut-on dire si le produit scalaire de deux vecteurs est nul ?

5. Trouver une équation de la droite (AB) et une de la droite (AC).

☐ **Exercice 21 : Projeter un vecteur**



Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{T}$, $\vec{P}$, $\vec{F}$ sur la base $(\tilde{\imath},\tilde{\jmath})$, en fonction de leur norme (=longueur).
Pour tout vecteur $\vec{U}$, on notera U sa longueur.

Mathématiques – Quelques rappels et formules à savoir

Une question à se poser, face à toutes ces formules : est-ce que je sais les utiliser ? Quelles sont les hypothèses de ces formules ou théorèmes ? Est-ce que je sais bien quels sont les objets que je manipule ? Des fonctions ? Des réels ? Entraînez-vous à repérer ce qui est une définition d'un objet et ce qui est une propriété que cet objet vérifie. Et pour aller plus loin : *Est-ce que je sais démontrer, prouver ces propriétés ?*

Symboles(⚠ce ne sont pas des abréviations !) :
$\forall$:« quelque soit, pour tout »
$\Leftrightarrow$: « est équivalent à ».
$\Longrightarrow$: « implique, entraîne »
☐ Ex : un petit exercice d'application ou de démonstration.

I Algèbre élémentaire

Puissances
$\star$ Pour $m,n \in \mathbb{N}$ et $a,b \in \mathbb{R}$:
$a^m \times a^n = a^{m+n}$
$(a^m)^n = a^{m\times n}$
$(a \times b)^n = a^n b^n$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
$\star$ Pour $a \in \mathbb{R}^*$ et $n,m \in \mathbb{N}$:
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$\frac{a^n}{b^m} = a^n \times b^{-m}$
$a^{-1} = \frac{1}{a}$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Racines carrées
Pour $a,b \in \mathbb{R}_+$:
$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ avec $b > 0$

Identités remarquables
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
☐ Ex : *Connaissez-vous une formule qui donne $(a+b)^3$? Et $(a+b)^4$? Sinon, comment faire pour en trouver une ?*

Inégalités
Pour $a,b,c,d \in \mathbb{R}$:
$a \leq b \implies a+c \leq b+c$
$a \leq b$ et $c > 0 \implies ac \leq bc$
$a \leq b$ et $c < 0 \implies ac \geq bc$
$a \leq b$ et $c \leq d \implies a+c \leq b+d$
$0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d \implies ac \leq bd$
$ab \geq 0 \Leftrightarrow a$ et b sont de même signe.
$ab \leq 0 \Leftrightarrow a$ et b sont de signe contraire.

☐ Ex : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.
Indication : pensez à utiliser le logarithme !

II Polynômes du second degré

On appelle **Forme canonique** la forme suivante :
Pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$:
$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(b^2-4ac)}{4a^2}\right]$
☐ Ex : *Démontrer que cette formule est vraie.*

On appelle Δ la quantité $\Delta = b^2 - 4ac$ et on l'appelle discriminant de l'équation.

Racines et factorisation

Si $\Delta = 0$:
L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ possède une racine double : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.
Le trinôme se factorise sous la forme : $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.
$f(x) = ax^2 + bx + c$ est du signe de a.

Si $\Delta < 0$:

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle et le polynôme ne se factorise pas.
$f(x) = ax^2 + bx + c$ est du signe de a.

Si $\Delta > 0$:
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

$f(x) = ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines et de $-a$ entre les racines.

Somme et produit des racines
On suppose que $\Delta > 0$. Soient x_1 et x_2 les racines de l'équation $ax^2 + bx + c$ $(a,b,c \in \mathbb{R})$.
$x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$ et $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$

☐ Ex : *Démontrer que ces deux formules sont vraies.*

III Fonctions

On note D_f l'ensemble de définition de la fonction f. I est un intervalle ou une réunion d'intervalle de D_f, a et b sont deux réels de I. Quelques définitions :

Fonction paire : $\forall x \in D_f,\ f(-x) = f(x)$
Fonction impaire : $\forall x \in D_f,\ f(-x) = -f(x)$
Fonction périodique : Il existe un réel T non nul tel que $\forall x \in D_f,\ f(x+T) = f(x)$
Fonction croissante :
$\forall (x,y) \in I^2,\ x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
Fonction strictement croissante :
$\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \implies f(x) < f(y)$
Fonction décroissante :
$\forall (x,y) \in I^2,\ x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$
Fonction strictement décroissante :
$\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \implies f(x) > f(y)$
Ensemble de définition d'une fonction f : c'est l'ensemble de tous les réels x tels que $f(x)$ existe. Par exemple, la fonction inverse $f(x) = \dfrac{1}{x}$ n'existe pas lorsque $x = 0$. Prendre l'habitude de donner l'ensemble de définition de toute fonction avant de démarrer un exercice, en cherchant :

1. les dénominateurs (ce qui est au dénominateur ne peut pas être nul)
2. les racines (ce qui est dans la racine ne peut pas être négatif)
3. les logarithmes (ce qui est dans le ln doit être strictement positif)

☐ Ex : avec uniquement ces propriétés :

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction définie pour tout x réel par $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ et démontrer qu'elle est impaire.
2. Donner l'ensemble de définition de la fonction définie pour tout x réel par $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$.

IV Trigonométrie

$\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$

Valeurs remarquables

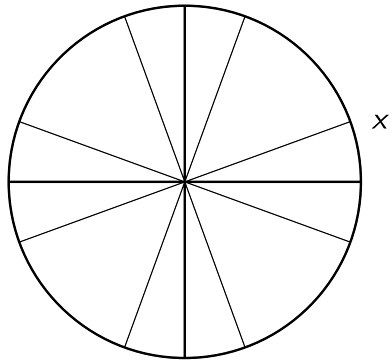
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Relations trigonométriques

Pour tout x réel :

$\cos(x + 2\pi) = \cos x$
$\sin(x + 2\pi) = \sin x$
$\cos(-x) = \cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\cos(\pi + x) = -\cos x$
$\sin(\pi - x) = \sin x$
$\sin(\pi + x) = -\sin x$



☐ Ex : *Visualisez toutes ces formules sur le cercle trigonométrique : où placer $x + \pi$, $x - \pi$, $x - \pi/2$, etc. ? Où sont leurs sinus, cosinus ? (dessin ci-contre à compléter)*

Pour tous a,b réels :
$\cos(a - b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$
$\cos(a + b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$
$\sin(a - b) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b$
$\sin(a + b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$
☐ Ex : voir exercice 18 de ce poly pour la démonstration.

Limites à connaître

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$

V Limites et asymptotes

Voici les définitions des droites que l'on appelle **Asymptotes**.
☐ Ex : *Faites un dessin pour bien comprendre.*

$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f, et $k \in \mathbb{R}$:
⋆ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = k \Leftrightarrow$ **asymptote horizontale** d'équation $y = k$.
⋆ $\lim\limits_{\substack{x\to k\\ x>k}} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to k\\ x<k}} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow$ **asymptote verticale** d'équation $x = k$.
⋆ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{D} : y = ax + b$ est **asymptote oblique** à $\mathcal{C}_f$.

Pour connaître la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{D}$, on étudie le signe de $f(x) - (ax + b)$, $\forall x \in \mathcal{D}_f$.

☐ Ex : *En parlant de limites, êtes-vous capable d'énoncer et d'utiliser le théorème des gendarmes ? (Dit aussi théorème d'encadrement). Écrivez-le ci-dessous :*

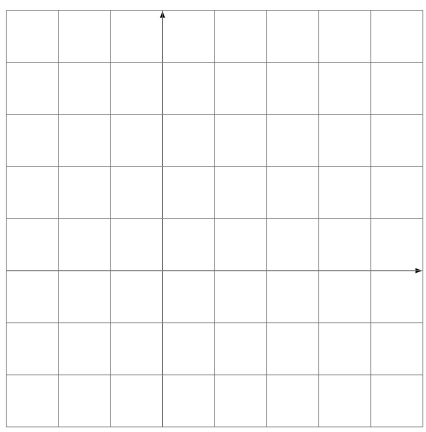
....

....

....

VI Dérivées

Voici la définition du **taux d'accroissement** d'une fonction f en un point a, pour $h > 0$:
$\tau(h) = \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$
☐ Ex : *Pouvez-vous dessiner une fonction f, placer un point a et dessiner ce que représente ce taux d'accroissement ?*



Dérivabilité en un point

Une fonction f est dérivable en a si son taux d'accroissement en a admet une limite quand h tend vers 0. Cette limite est alors appellée $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$$

Dérivabilité sur un intervalle I

f est dérivable sur un intervalle si elle est dérivable en tout point a appartenant à cet intervalle.

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	$\mathcal{D}_f$	Fonction dérivée f'	$\mathcal{D}'_f$
$x \mapsto k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{Z}^*)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^*_+$
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$

Opérations sur les dérivées

Fonction h	Fonction dérivée h'
$h = f + g$	$h' = f' + g'$
$h = f - g$	$h' = f' - g'$
$h = \lambda f$	$h' = \lambda f'$
$h = f \times g$	$h' = f'g + g'f$
$h = \frac{f}{g}$	$h' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$
$h = f \circ g$	$h' = (f' \circ g) \times g'$

Tangente en un point a : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

VII Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1 : Théorème des valeurs intermédiaires.

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $[a,b]$.

$\star$ Si $a < b$, $f(a) < f(b)$ alors $\forall k \in [f(a),f(b)]$ il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.

$\star$ Si $a < b$, $f(a) > f(b)$ alors $\forall k \in [f(b),f(a)]$ il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.

☐ Ex : *Observez que le réel c n'est pas forcément unique. Constatez aussi que l'on ne mentionne ni croissance, ni décroissance de f dans cette définition. Faites plusieurs dessins pour mieux comprendre ces observations.*

VIII Primitives

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$	Intervalle
0	k, $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
k, $k \in \mathbb{R}$	kx	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2$	$\mathbb{R}$
x^α, $\alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$	$\mathbb{R}^*_-$ ou $\mathbb{R}^*_+$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*_-$ ou $\mathbb{R}^*_+$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^*_+$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

Primitives de fonctions composées

u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction f	Primitive F	Intervalle
$u'.u^r$, $r \neq -1$	$\frac{u^{r+1}}{r+1}$	I
$\frac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$	$\forall x \in I$ tq $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	$\forall x \in I$ tq $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$\forall x \in I$ tq $u(x) > 0$
$u'e^u$	e^u	I

(*tq = tel que.*)

IX Intégrales

Si F est une primitive d'une fonction f, alors :
$\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_b^a$

Théorème fondamental du calcul intégral
L'unique primitive de f sur $[a,b]$ qui s'annule en $c \in [a,b]$ est la fonction G définie par :
$G(x) = \displaystyle\int_c^x f(x)\,\mathrm{d}x, \forall x \in [a,b]$.
Ce théorème s'appelle le théorème fondamental du calcul intégral : nous verrons pourquoi cette année.

Relation de Chasles :
$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$

X Fonction logarithme népérien

Définition

La fonction ln est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\ln \mathrm{e} = 1$
$\ln 1 = 0$
$(\ln)'(x) = \dfrac{1}{x}$
$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
$\ln a < \ln b \Leftrightarrow 0 < a < b$

Propriétés de ln

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$
$\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$
$\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
$\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln a$
$\ln a^n = n \ln a$

Limites

$\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$
$\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$
$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Fonction $\ln(u)$

Définie pour tout x tel que $u(x) > 0$.
$(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$
Primitive de $\dfrac{u'}{u}$: $\ln|u|$
☐ Ex : *Pouvez-vous trouver une primitive de la fonction* ln *?*

XI Fonction exponentielle

Définition

Définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, et tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $y = \exp(x) \Leftrightarrow \ln y = x$

Propriétés

Pour $x \in \mathbb{R}$:
$\ln(\exp x) = x$.
Pour $x \in]0, +\infty[$:
$\exp(\ln x) = x$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp x > 0$
$\exp(0) = 1$
$\exp(x) = \exp(y) \Leftrightarrow x = y$
$\exp(x) < \exp(y) \Leftrightarrow x < y$

Règles de calcul

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$:
$e^{x+y} = e^x . e^y$
$e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
$e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
$e^{nx} = (e^x)^n$

Dérivée
$\forall x \in \mathbb{R}, (\exp x)' = \exp x$

Limites

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

Fonction $\exp(u)$

Définie sur un intervalle I si et seulement si u est définie sur I.
Dérivée :
$(\exp u)' = u' . \exp(u)$

XII Suites numériques

Une suite, c'est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Raisonnement par récurrence

Pour démontrer qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier n :

1. *Initialisation* : On montre que P_0 est vraie.
2. *Hypothèse de récurrence* : On suppose que P_n est vraie pour un certain rang n fixé.
   Hérédité : On montre que P_{n+1} est vraie.
3. *Conclusion*

Différentes définitions d'une suite

⋆ Explicitement : suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$, où f est une fonction.
⋆ Par récurrence : suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = \alpha$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction.

Monotonie

(u_n) est croissante $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$
(u_n) est décroissante $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$

Suites arithmétiques

On appelle **suite arithmétique** de raison r toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
Propriété caractéristique
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
☐ Ex : *Démontrez que le résultat ci-dessus est vrai.*
Sommes des termes
$\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant m, \displaystyle\sum_{k=m}^{n} u_k = (n - m + 1)\frac{u_m + u_n}{2}$.

Suites géométriques

On appelle **suite géométrique** de raison q toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q u_n$.
Propriété caractéristique
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 q^n$.
☐ Ex : *Démontrez que le résultat ci-dessus est vrai.*
Sommes des termes
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

XIII Coefficients du binome, combinaisons

Définition 1 (factorielle)
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$.

Par convention, $0! = 1$.

Définition 2
On note $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Propriétés 1 :
$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \qquad \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

☐ Ex : *Calculer* $\binom{4}{2}$, $\binom{3}{1}$, $\binom{6}{5}$ *puis démontrer les propriétés précédentes.*

XIV Bases de probabilités discrètes

- ⋆ Calcul de la probabilité de la **réunion** de deux évènements A et B :
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- ⋆ Deux évènements A et B sont **incompatibles** si : $A \cap B = \varnothing$
- ⋆ Formule des probabilités totales :
  Si les évènements B_1, B_2, ... B_n forment une partition de l'univers Ω, alors :
  $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_n)$.

☐ Ex : *Faire des dessins pour illustrer les formules ci-dessus.*

- ⋆ Formule des probabilités conditionnelles :
  $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- ⋆ Deux évènements A et B sont **indépendants** si :
  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
  $\Leftrightarrow P_B(A) = P(A)$
  $\Leftrightarrow P_A(B) = P(B)$

Variables aléatoires discrètes X

- ⋆ Espérance :
  $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$
  où x_i est la valeur que peut prendre X et
  $p_i = P(X = x_i)$.

- ⋆ Variance (σ^2 ou V) :
  $V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - E(X)^2$
- ⋆ Ecart-type : $\sigma = \sqrt{\text{Variance}}$

Lois usuelles discrètes

- ⋆ Bernoulli : X peut prendre deux valeurs : 0 ou 1 (succès ou échec, pile ou face, ...), avec probabilité p de succès $(X = 1)$.
  $E(X) = p$, $V(X) = p(1-p)$.
- ⋆ Binomiale : On considère un échantillon de n variables aléatoires qui suivent une même loi de Bernoulli avec probabilité p.
  Loi : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
  Espérance : $E(X) = np$,
  Variance : $V(X) = np(1-p)$

Mathématiques – Éléments de correction

Instructions : une partie de cette année de mathématiques sera consacrée à apprendre le raisonnement et la bonne rédaction mathématique. Ces corrigés incomplets, dépourvus de rédaction, ne sont utiles que si vous avez déjà cherché la réponse, que si vous avez effectué et rédigé les calculs... Bref, ils ne servent qu'à vérifier si ce que vous avez fait est juste, mais ils ne constituent en rien une explication ni un raisonnement.
Cette année, vous apprendrez que : *Pas de justification ⇒ pas de points.*

1. $A = \dfrac{5}{24}$
2. $p = \dfrac{3}{163}$, $q = \dfrac{4}{5}$
3. $A = \dfrac{-u^2 - 2u + 4}{u(u-1)(u+1)(u+2)}$
4. $-\dfrac{3}{5} \leqslant x < 0$ donc $x \in [-\dfrac{3}{5}; 0[$
5. $A = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, $B = \dfrac{(1-\sqrt{3})^3}{4}$, $C = \sqrt{2}$.
6. $A = x(x+3)$, $B = (x-3)(x+3)$,
   $C = (2x-3)(2x+3)$, D non factorisable dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{C}$: $D = (2x-5i)(2x+5i)$,
   $E = (7x - \dfrac{3+\sqrt{3}}{2})(7x - \dfrac{3-\sqrt{3}}{2})$, $F = (x+2)(x+3)$
7. Par combinaisons de lignes, on a $11x = 31$ et $11y = -3$ d'où $x = \dfrac{31}{11}$ et $y = -\dfrac{3}{11}$.
8. *À rédiger.*
9. $A = e^{-5}$, $B = e^{-15}$, $C = \dfrac{9}{8}$, $D = 2$.
10. (a) $x = -\dfrac{1}{2}$, (b) $x = 0$ ou $x = -1$, (c) $x \leqslant 1$, (d) $x = \dfrac{\ln(3)+1}{3}$, (e) $x = 0$, (f) $x = -2$ ou $x = -1$.
11. 1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \exp(x) = 1$.
    $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
    $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$.
    $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.
    2. Dérivée de $x \mapsto 1/x$: $x \mapsto -1/x^2$
    Dérivée de $x \mapsto (ax+b)^n$: $x \mapsto na(ax+b)^{n-1}$.
    Dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$: $x \mapsto 1/(2\sqrt{x})$
    Dérivée de $x \mapsto \ln(ax+b)$: $x \mapsto a/(ax+b)$
    Dérivée d e$x \mapsto \exp(x^2)$: $x \mapsto 2x\exp(x^2)$.
    Dérivée de cos : $-\sin$. Dérivée de sin : $-\cos$.
    3. Pour $x \mapsto \exp(ax)$: $x \mapsto \dfrac{1}{a}\exp(ax) + C^{te}$.
    Pour $x \mapsto 1/x$: $x \mapsto \ln|x| + C^{te}$
    Pour sin : $-\cos + C^{te}$ et pour cos : $\sin + C^{te}$.
    4. $\exp(b)$, $\ln(a)$, $1/a$, x^5.
12. Toutes les fonctions seront nommées f.
    (a) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale. Sa dérivée est $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 2x$.
    (b) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et sa dérivée est : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f'(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{(x+1)^3}$.
    (c) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car $e^x > 0$ et sa dérivée est $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1-x}{e^x}$.
    (d) f est définie et dérivable sur $D =]-\infty; -1-\sqrt{2}[\cup]-1+\sqrt{2}; +\infty[$ et sa dérivée est $\forall x \in D$,

$f'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}}$.

(e) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

(f) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et sa dérivée est $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ f'(x) = \left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)^2 (4x+5)$.

(g) f est définie sur $]-\infty;1]$ et dérivable sur $]-\infty;1[$ et sa dérivée est $\forall x \in]-\infty;1[,\ f'(x) = e^x \dfrac{1-2x}{2\sqrt{1-x}}$.

(h) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \dfrac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$.

(i) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = we^{wx} - 1$.

13. Dans la suite, C est une constante réelle.
(a) $F(x) = x^2 + C$,
(b) $F(x) = \dfrac{x^{12}}{2} - 2x^4 + C$,
(c) $F(x) = x + \dfrac{1}{x}$,
(d) $x-2<0$ sur $]-\infty;2[$ donc $F(x) = \ln(x-2) + C$,
(e) $F(x) = -\dfrac{1}{8(2x+3)^4} + C$,
(f) $F(x) = 3\sqrt{x^2-1} + C$.

14. $a = \dfrac{9}{2}$, $b = -\dfrac{1}{2}$. $\displaystyle\int_3^5 \frac{4x-5}{x^2-1}\,dx = \frac{9}{2}\ln 6 - \frac{19}{2}\ln 2$.

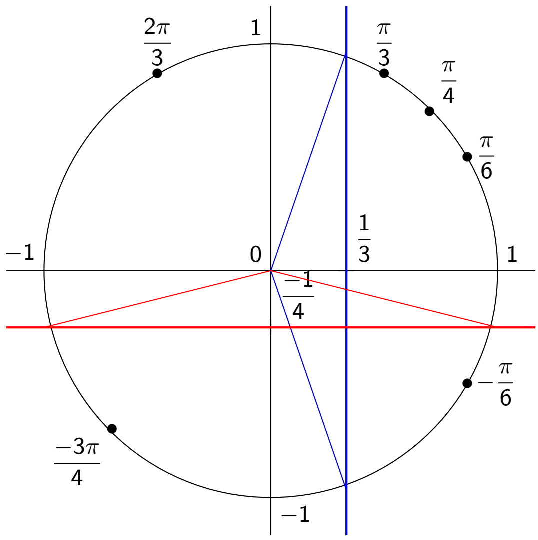
15. Réponses à la question 4. Dans la suite, K est une constante réelle.
(a) $f(t) = Ke^{3t}$, (b) $f(x) = Ke^{-\frac{t}{2}}$,
(c) $f(t) = Ke^{t^2}$, (d) $f(t) = Kt$.

16. *Me demander.*

17. *Me demander.*

18. *Me demander.*

19. **a)** $\cos\theta = \dfrac{AB}{BC}$, $\sin\theta = \dfrac{AC}{BC}$



b)

c) En bleu les angles dont le cosinus est $1/3$; en rouge, ceux dont le sinus vaut $-1/4$.

d) $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$, $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$,
$\cos(\pi-\theta) = -\cos(\theta)$,
$\cos(\theta+\pi) = -\cos(\theta), \sin(\pi+\theta) = -\sin(\theta)$,
$\cos(\pi/2+\theta) = -\sin(\theta)$, $\sin(\pi/2+\theta) = \cos(\theta)$,
$\cos(\pi/2-\theta) = \sin(\theta)$, $\sin(\pi/2-\theta) = \cos(\theta)$.

e) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$.

20. **a)** De $A : \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $B : \begin{pmatrix}1{,}2\end{pmatrix}$, $C : \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, on déduit $\overrightarrow{AB} : \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} : \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

b) De $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ on déduit $\overrightarrow{BC} : \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$.

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (-1)\times 1 + 1 \times 3 = 2$.

d) On peut dire que les vecteurs sont orthogonaux. C'est le cas ici pour $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

e) Pour (AB) : $\dfrac{y-1}{x-2} = -1$ d'où $y = 3-x$.
Pour (AC) : $\dfrac{y-1}{x-2} = 3$ d'où $y = 3x-5$.

21. $\overrightarrow{T} = -T\tilde{\imath}$
$\overrightarrow{P} = P\cos\theta\tilde{\imath} - P\sin\theta\tilde{\jmath}$
$\overrightarrow{F} = -F\sin\theta\tilde{\imath} - F\cos\theta\tilde{\jmath}$