PÔLE CHATEAUBRIAND JOLIOT-CURIE

Sciences de l'ingénieur

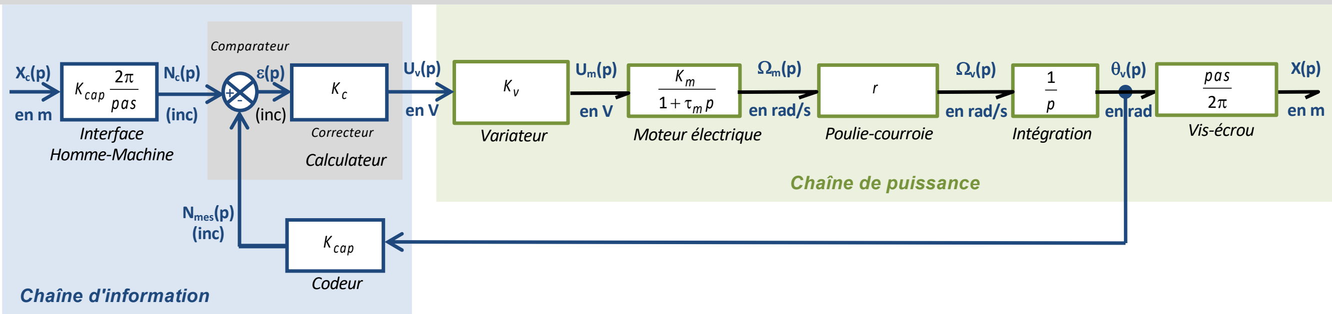
TD 1 : MODELISATION, SYNTHESE ET PERFORMANCES EN POURSUITE DES SYSTEMES ASSERVIS

C 05

CORRIGE

Exercice 1.1 : AXE ASSERVI DE MACHINE-OUTIL

Q1 : À l'aide de la description ci-dessus, compléter le schéma-bloc en faisant apparaitre les fonctions de transfert à l'intérieur des blocs et les grandeurs transmises d'un bloc à l'autre. Déterminer les valeurs numériques des gains.



Codeur : 400 incréments par tour, soit $K_{cap}=\dfrac{400}{2\pi}\approx 63{,}67$ inc/rad.

Variateur : 24 V pour une commande de 5 V, soit $K_v=24/5=4{,}8$ V/V. Mécanisme Vis-écrou : *pas* = 0,004 m/tr

Q2 : Déterminer la fonction de transfert de l'interface homme-machine ainsi que sa valeur numérique.

Pour toute valeur de la consigne, l'image de l'erreur $\varepsilon(p)=K_{IHM}\,X_c(p)-\dfrac{K_{cap}}{pas/2\pi}X(p)$ doit être nulle lorsque l'erreur est nulle. D'où : $K_{IHM}=K_{cap}\dfrac{2\pi}{pas}=\dfrac{400}{2\pi}\dfrac{2\pi}{4\cdot 10^{-3}}=100\cdot 10^{3}=10^{5}$ inc/m.

Q3 : Déterminer la fonction de transfert $H(p)=\dfrac{X(p)}{X_c(p)}$, son gain, son ordre et sa classe. Le modèle est-il stable ? Est-il précis pour une consigne en échelon ?

$$\frac{X(p)}{X_c(p)}=K_{cap}\frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{pas}}\cdot\frac{K_cK_v\dfrac{K_m}{(1+\tau_m p)}r\dfrac{1}{p}}{1+K_cK_v\dfrac{K_m}{(1+\tau_m p)}r\dfrac{1}{p}K_{cap}}\cdot\frac{\cancel{pas}}{\cancel{2\pi}}$$ (on pose , puis simplification)

$$=K_{cap}\cdot\frac{K_cK_vK_mr}{(1+\tau_m p)p+K_cK_vK_mrK_{cap}}$$ (multiplication par le dénominateur du dénominateur)

$$=\frac{\cancel{K_{cap}K_cK_vK_mr}}{\cancel{K_cK_vK_m\,r\,K_{cap}}}\cdot\frac{1}{\dfrac{(1+\tau_m p)p}{K_cK_vK_mrK_{cap}}+1}$$ (développer, mettre sous forme canonique)

On obtient $\dfrac{X(p)}{X_c(p)}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{K_c\,K_v\,K_m\,r\,K_{cap}}p+\dfrac{\tau_m}{K_c\,K_v\,K_m\,r\,K_{cap}}p^2}$, système du 2ème ordre, classe 0, gain unitaire.

Le système est stable si les constantes sont strictement positives. De classe 0 et de gain unitaire, l'erreur statique est nulle.

Q4 : Déterminer l'erreur de trainage pour une entrée $x(t)=V_0\,t$ pour $t\geq 0$ s.

On pose : $H(p)=\dfrac{X(p)}{X_c(p)}=\dfrac{1}{1+a\,p+b\,p^2}$. La consigne est : $X_c(p)=\dfrac{V_0}{p^2}$.

L'erreur de poursuite s'écrit :

$$e_{pour}(+\infty) = \lim_{t\to+\infty}\left(\Delta X_c(t) - \Delta X(t)\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(X_c(t) - X(t)\right) = \lim_{p\to 0^+} p\,X_c(p)\left(1 - H(p)\right)$$

$$= \lim_{p\to 0^+} \cancel{p}\,\frac{V_0}{p^{\cancel{2}}}\left(1 - \frac{1}{1+a\,p+b\,p^2}\right) = \lim_{p\to 0^+} \frac{V_0}{p}\left(\frac{\cancel{1} + a\,p + b\,p^2 \cancel{-1}}{1+a\,p+b\,p^2}\right) = \lim_{p\to 0^+} \frac{V_0}{\cancel{p}}\left(\frac{a\,\cancel{p} + b\,p^{\cancel{2}}}{1+a\,p+b\,p^2}\right)$$

$$= \lim_{p\to 0^+} V_0\left(\frac{a + b\,p}{1+a\,p+b\,p^2}\right) = a\,V_0 = \frac{V_0}{K_c\,K_v\,K_m\,r\,K_{cap}}$$

Q5 : Déterminer les paramètres caractéristiques du modèle.

Le modèle est un deuxième ordre de classe 0. Les paramètres caractéristiques sont le gain statique K, z et ω_0.

En posant $\dfrac{2z}{\omega_0} = \dfrac{1}{K_c\,K_v\,K_m\,r\,K_{cap}}$ et $\dfrac{1}{\omega_0^2} = \dfrac{\tau_m}{K_c\,K_v\,K_m\,r\,K_{cap}}$

On obtient : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K_c\,K_v\,K_m\,r\,K_{cap}}{\tau_m}}$ et $z = \dfrac{1}{2K_c\,K_v\,K_m\,r\,K_{cap}}\omega_0 = \dfrac{1}{2\sqrt{K_c\,K_v\,K_m\,r\,K_{cap}\,\tau_m}}$

Q6 : Déterminer une condition sur le gain du correcteur K_c pour que la réponse à un échelon soit sans dépassement.

La réponse à une entrée en échelon ne présente pas de dépassement si $z \geq 1$.

Soit la condition : $\dfrac{1}{2\sqrt{K_c\,K_v\,K_m\,r\,K_{cap}\,\tau_m}} \geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4K_c\,K_v\,K_m\,r\,K_{cap}\,\tau_m} \geq 1 \Leftrightarrow K_c \leq \dfrac{1}{4K_v\,K_m\,r\,K_{cap}\,\tau_m}$

Q7 : En déduire la valeur de K_c permettant d'obtenir une réponse à un échelon la plus rapide possible sans dépassement.

Le temps de réponse vérifie $t_{r5\%} = \dfrac{f(z)}{\omega_0}$ avec $f(z)$ strictement croissante pour $z \geq 1$.

Pour des valeurs croissantes de K_c, ω_0 augmente , z diminue et donc et $f(z)$ diminue aussi ; au final le rapport $f(z)/\omega_0$ diminue.

Lorsque le gain du correcteur augmente, le temps de réponse diminue.

Le temps de réponse minimal est obtenue pour K_c maximal, soit pour $K_c = \dfrac{1}{4K_v\,K_m\,r\,K_{cap}\,\tau_m}$.

Q8 : Vérifier la cohérence des résultats avec l'étude réalisée. Proposer une solution permettant d'augmenter le temps de réponse.

Pour la valeur limite, aucun dépassement n'est visible, en cohérence avec la solution calculée.

L'augmentation du gain du correcteur conduit à la présence de dépassements et, dans un premier temps, à une diminution du temps de réponse (jusqu'à z=0,69).

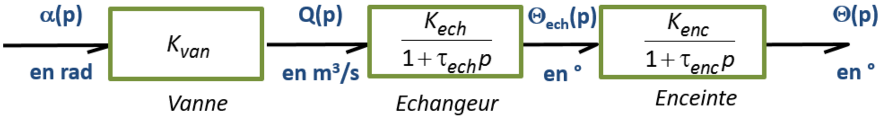
Pour diminuer le temps de réponse, il faudrait accepter un léger dépassement.

Exercice 1.2 : **ENCEINTE CHAUFFANTE**

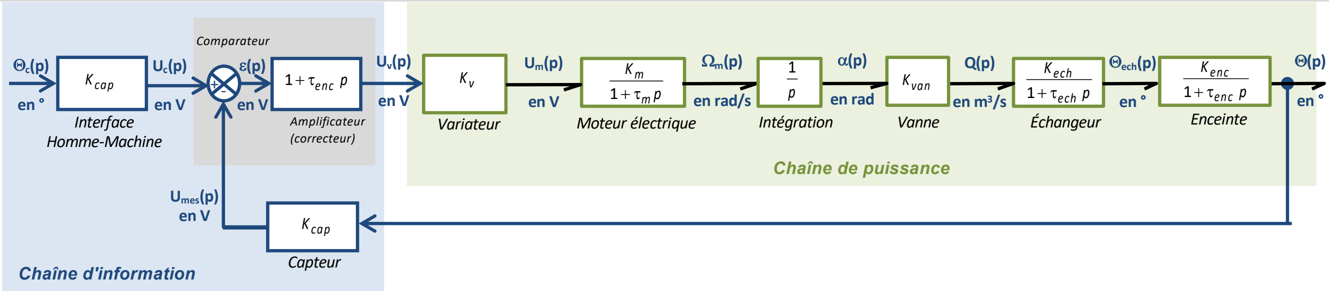
Q1 : Déterminer les fonctions de transfert de la vanne, de l'échangeur et de l'enceinte.

Composant	**Relation temporelle**	**Relation dans le domaine de Laplace**	**Fonction de transfert + Schéma-bloc**
Vanne	$q(t) = K_{van}\,\alpha(t)$	$Q(p) = K_{van}\,\alpha(p)$	$\alpha(p) \rightarrow \boxed{K_{van}} \rightarrow Q(p)$
Échangeur	$\theta_{ech}(t) + \tau_{ech}\dfrac{d\theta_{ech}(t)}{dt} = K_{ech}\,q(t)$	$\Theta_{ech}(p) + \tau_{ech}p\,\Theta_{ech}(p) = K_{ech}Q(p)$ soit $\Theta_{ech}(p) = \dfrac{K_{ech}}{1+\tau_{ech}\,p}Q(p)$	$Q(p) \rightarrow \boxed{\dfrac{K_{ech}}{1+\tau_{ech}\,p}} \rightarrow \Theta_{ech}(p)$
Enceinte	$\theta(t) + \tau_{enc}\dfrac{d\theta(t)}{dt} = K_{enc}\,\theta_{ech}(t)$	$\Theta(p) + \tau_{enc}p\,\Theta(p) = K_{enc}\,\Theta_{enc}(p)$ Soit $\Theta(p) = \dfrac{K_{enc}}{1+\tau_{enc}\,p}\Theta_{enc}(p)$	$\Theta_{enc}(p) \rightarrow \boxed{\dfrac{K_{enc}}{1+\tau_{enc}\,p}} \rightarrow \Theta(p)$

Q2 : Compléter le schéma-bloc avec les fonctions de transfert de la question précédente.



Q3 : Compléter le schéma-bloc en précisant les fonctions de transfert à l'intérieur des blocs, ainsi que les grandeurs d'entrée sortie de chaque bloc.



Q4 : Déterminer la fonction de transfert de l'IHM.

Pour toute valeur de la consigne, l'image de l'erreur $\varepsilon(p)=K_{IHM}\,\theta_c(p)-K_{cap}\,\theta(p)$ doit être nulle lorsque l'erreur est nulle.

D'où : $K_{IHM}=K_{cap}$.

Q5 : Déterminer la fonction de transfert globale du système (ne pas oublier les étapes de simplification).

$$\frac{\Theta(p)}{\Theta_c(p)} = K_{cap}\cdot\frac{\cancel{(1+\tau_{enc}p)}K_v\left(\frac{K_m}{(1+\tau_m p)p}\right)K_{van}\left(\frac{K_{ech}}{1+\tau_{ech}p}\right)\left(\frac{K_{enc}}{\cancel{1+\tau_{enc}p}}\right)}{1+\cancel{(1+\tau_{enc}p)}K_v\left(\frac{K_m}{(1+\tau_m p)p}\right)K_{van}\left(\frac{K_{ech}}{1+\tau_{ech}p}\right)\left(\frac{K_{enc}}{\cancel{1+\tau_{enc}p}}\right)\cdot K_{cap}} \quad \text{(écrire la fontion et simplifier)}$$

$$= \frac{K_{cap}K_vK_mK_{van}K_{ech}K_{enc}}{(1+\tau_m p)p(1+\tau_{ech}p)+K_vK_mK_{van}K_{ech}K_{enc}K_{cap}} \quad \text{(mutiplier par le dénominateur du dénominateur)}$$

$$\frac{\Theta(p)}{\Theta_c(p)} = \frac{K_{cap}K_vK_mK_{van}K_{ech}K_{enc}}{p+(\tau_m+\tau_{ech})\,p^2+\tau_m\tau_{ech}\;p^3+K_vK_mK_{van}K_{ech}K_{enc}K_{cap}} \quad \text{(développer)}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{K_vK_mK_{van}K_{ech}K_{enc}K_{cap}}p+\frac{\tau_m+\tau_{ech}}{K_vK_mK_{van}K_{ech}K_{enc}K_{cap}}p^2+\frac{\tau_m\tau_{ech}}{K_vK_mK_{van}K_{ech}K_{enc}K_{cap}}p^3} \quad \text{(mettre sous forme canonique)}$$

Q6 : Déterminer une condition de stabilité.

Le modèle est d'ordre 3 et de classe 0. Les coefficients sont supposés tous supérieurs à 0.

Le modèle est stable si : $\frac{1}{K_vK_mK_{van}K_{ech}K_{enc}K_{cap}}\times\frac{\tau_m+\tau_{ech}}{K_vK_mK_{van}K_{ech}K_{enc}K_{cap}} > \frac{\tau_m\tau_{ech}}{K_vK_mK_{van}K_{ech}K_{enc}K_{cap}}$

$\Leftrightarrow \frac{\tau_m+\tau_{ech}}{K_vK_mK_{van}K_{ech}K_{enc}K_{cap}} > \tau_m\tau_{ech}$

Q7 : Déterminer les performances de précision en poursuite pour une consigne en échelon.

Modèle stable de classe 0, de gain statique unitaire : le modèle est parfaitement précis en poursuite pour une entrée en échelon.

Q8 : Déterminer les performances de précision en poursuite pour une consigne en rampe.

On pose : $H(p)=\frac{\theta(p)}{\theta_c(p)}=\frac{1}{1+a\,p+b\,p^2+c\,p^3}$. La consigne est : $\theta_c(p)=\frac{A}{p^2}$ avec A une constante.

L'erreur de poursuite s'écrit :

$$
\begin{aligned}
e_{pour}(+\infty) &= \lim_{t\to+\infty}\left(\Delta\theta_c(t)-\Delta\theta(t)\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(\theta_c(t)-\theta(t)\right)=\lim_{p\to0^+} p\,\theta_c(p)\left(1-H(p)\right)\\
&= \lim_{p\to0^+} \cancel{p}\,\frac{A}{p^{\cancel{2}}}\left(1-\frac{1}{1+ap+bp^2+cp^3}\right)=\lim_{p\to0^+}\frac{A}{p}\left(\frac{\cancel{1}+ap+bp^2+cp^3\cancel{-1}}{1+ap+bp^2+cp^3}\right)=\lim_{p\to0^+}\frac{A}{\cancel{p}}\left(\frac{a\,\cancel{p}+b\,p^{\cancel{2}}+c\,p^{\cancel{3}2}}{1+a\,p+b\,p^2+c\,p^3}\right)\\
&= \lim_{p\to0^+} A\left(\frac{a+b\,p+c\,p}{1+a\,p+b\,p^2+c\,p^3}\right)=a\,A=\frac{A}{K_v\,K_m\,K_{van}\,K_{ech}\,K_{enc}\,K_{cap}}
\end{aligned}
$$

Exercice 1.3 : **CABLECAM**

Q1 : Déterminer la fonction de transfert de l'IHM.

Pour toute valeur de la consigne, l'image de l'erreur $\varepsilon(p)=K_{IHM}\,X_c(p)-k_c\,X(p)$ doit être nulle lorsque l'erreur est nulle. D'où : $K_{IHM}=k_c$.

Q2 : Déterminer la fonction de transfert $\theta(p)/\Omega(p)$: $\omega(t)=\dfrac{d\,\theta(t)}{dt}$, d'où $\Omega(p)=p\theta(p)$, soit $\dfrac{\theta(p)}{\Omega(p)}=\dfrac{1}{p}$

Q3 : Déterminer la fonction de transfert du système.

Boucle intérieure : $\dfrac{\Omega(p)}{U_m(p)}=\dfrac{\dfrac{1}{R+Lp}k_t\dfrac{1}{J_{eq}p}}{1+k_e\cdot\dfrac{1}{R+Lp}k_t\dfrac{1}{J_{eq}p}}=\dfrac{k_t}{(R+Lp)J_{eq}p+k_t\,k_e}$

boucle intérieur, en fraction de polynômes, non sous forme canonique

$$
\begin{aligned}
\frac{X(p)}{X_c(p)} &= k_c\frac{KG\dfrac{k_t}{(R+Lp)J_{eq}p+k_t\,k_e}\cdot\dfrac{r}{p}}{1+k_cKG\dfrac{k_t}{(R+Lp)J_{eq}p+k_t\,k_e}\cdot\dfrac{r}{p}}=\frac{k_c\,K\,G\,k_t\,r}{\left((R+Lp)J_{eq}p+k_t\,k_e\right)p+k_c\,K\,G\,k_t\,r}=\frac{k_c\,K\,G\,k_t\,r}{k_c\,K\,G\,k_t\,r+k_t\,k_e\,p+R\,J_{eq}\,p^2+L\,J_{eq}\,p^3}\\
&= \frac{k_c\,K\,G\,\cancel{k_t\,r}}{\cancel{k_c}\,K\,G\,k_t\,r}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{\cancel{k_t}\,k_e}{k_c\,K\,G\,\cancel{k_t}\,r}p+\dfrac{R\,J_{eq}}{k_c\,K\,G\,k_t\,r}p^2+\dfrac{L\,J_{eq}}{k_c\,K\,G\,k_t\,r}p^3}=\boxed{\frac{1}{1+\dfrac{k_e}{k_c\,K\,G\,r}p+\dfrac{R\,J_{eq}}{k_c\,K\,G\,k_t\,r}p^2+\dfrac{L\,J_{eq}}{k_c\,K\,G\,k_t\,r}p^3}}
\end{aligned}
$$

Q4 : Quelle est l'erreur relative de poursuite pour une entrée en échelon ?

Il s'agit d'un système de classe 0, de gain statique unitaire.

L'erreur relative vaut $1-K=0$. Si le système est stable, le système est en théorie parfaitement précis en poursuite.

Q5 : Quelle influence va avoir le gain du correcteur ?

Le gain du correcteur n'influe pas sur la précision. Par contre, il va modifier la rapidité et la stabilité (dépassements).

Q6 : Déterminer la condition à respecter par le gain *K* du correcteur pour que le système soit stable.

Modèle de classe 0, de coefficients au dénominateur strictement positifs, de degré 3. La condition de stabilité s'écrit :

$$
\frac{k_e}{k_c\,K\,G\,r}\,\frac{R\,J_{eq}}{k_c\,K\,G\,k_t\,r}>\frac{L\,J_{eq}}{k_c\,K\,G\,k_t\,r}\Rightarrow\frac{k_e}{k_c\,K\,G\,r}R>L\Rightarrow\boxed{K<\frac{k_e\,R}{k_c\,G\,r\,L}}
$$

Q7 : Déterminer l'erreur de poursuite pour une entrée en rampe à vitesse constante v_0 .

On pose : $H(p)=\dfrac{X(p)}{X_c(p)}=\dfrac{1}{1+a\,p+b\,p^2+c\,p^3}$. La consigne est $x_c(t)=v_0\,t$ pour $t\geq0$, soit $X_c(p)=\dfrac{v_0}{p^2}$. L'erreur s'écrit :

$$
\begin{aligned}
e_{pour}(+\infty) &= \lim_{t\to+\infty}\left(\Delta X_c(t)-\Delta X(t)\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(X_c(t)-X(t)\right)=\lim_{p\to0^+} p\,X_c(p)\left(1-H(p)\right)\\
&= \lim_{p\to0^+} \cancel{p}\,\frac{v_0}{p^{\cancel{2}}}\left(1-\frac{1}{1+ap+bp^2+cp^3}\right)=\lim_{p\to0^+}\frac{v_0}{p}\left(\frac{\cancel{1}+ap+bp^2+cp^3\cancel{-1}}{1+ap+bp^2+cp^3}\right)=\lim_{p\to0^+}\frac{v_0}{\cancel{p}}\left(\frac{a\,\cancel{p}+b\,p^{\cancel{2}}+c\,p^{\cancel{3}2}}{1+a\,p+b\,p^2+c\,p^3}\right)\\
&= \lim_{p\to0^+} v_0\left(\frac{a+b\,p+c\,p}{1+a\,p+b\,p^2+c\,p^3}\right)=a\,v_0=\frac{k_e}{k_c\,K\,G\,r}v_0
\end{aligned}
$$