

# Prévoir le comportement fréquentiel des SLCI

Automatique linéaire

## Objectifs

Connaître le comportement fréquentiel des systèmes usuels  
Savoir construire le diagramme de Bode d'un système quelconque  
Connaître le lien entre comportement fréquentiel et temporel

## Sommaire

<b>I</b>	<b>L'analyse fréquentielle</b>	<b>3</b>
<b>II</b>	<b>Réponse fréquentielle (ou harmonique) des SLCI</b>	<b>3</b>
II.1	Caractéristiques du comportement fréquentiel	3
II.2	Gain, déphasage et fonction de transfert : $ G(\omega)  =  H(j\omega) $ et $\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega))$	4
II.3	Les diagrammes de Bode, lieu de transfert pour les études fréquentielles	5
II.4	Comportement aux basses fréquences (gain, intégrateur, dérivateur)	7
II.5	Filtres, bande passante et pulsation de coupure	9
<b>III</b>	<b>Construction d'un diagramme de Bode</b>	<b>10</b>
III.1	Propriétés pour la construction d'un diagramme de Bode	10
III.2	Diagramme de Bode d'un système du 1 <sup>er</sup> ordre	11
III.3	Diagramme de Bode d'un système du 2 <sup>ème</sup> ordre	12
III.4	Inverses d'un premier et deuxième ordre	15
<b>IV</b>	<b>Méthode générale de construction des diagrammes de Bode</b>	<b>16</b>
<b>V</b>	<b>Comparaison des études temporelle et fréquentielle en FTBF</b>	<b>16</b>
V.1	Stabilité de la FTBF	16
V.2	Erreur statique de la FTBF	16
V.3	Relation Bande passante de la FTBF et rapidité	17
V.4	Synthèse sur les différents gains	18
V.5	Synthèse sur les différentes pulsations	18
	<b>Rappels sur les logarithmes et les complexes</b>	<b>19</b>

## I L'analyse fréquentielle

L'analyse fréquentielle d'un système s'intéresse à sa réponse à une **sollicitation périodique**.

Exemples :  
cuillère anti-tremblements



Robot de chirurgie



Stabilisateur de smartphone



Exemples de système dont l'amplitude des oscillations du signal de sortie doit être atténuée.

(1) Système modélisé en SLCI : linéaire, continu, invariant.

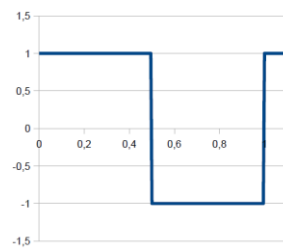
(2) la réponse à un échelon permet de caractériser un système à partir de sa réponse transitoire.

L'analyse fréquentielle des systèmes linéaires<sup>(1)</sup> permet de **caractériser le comportement** d'un système à partir de sa **réponse en régime permanent à des entrées sinusoïdales**<sup>(2)</sup>.

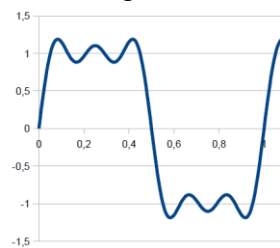
En **régime permanent**, la réponse du système est **indépendante de l'état initial** du système.

L'analyse fréquentielle permet :

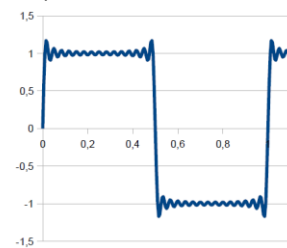
- l'étude et la **conception des correcteurs** (traitées en 2<sup>ème</sup> année) ;
- l'étude de certaines **performances temporelles** : stabilité et précision, en particulier.
- la **prédiction du comportement temporel** en considérant le signal d'entrée comme un signal sinusoïdal ou comme une somme de signaux sinusoïdaux (transformée de Fourier).



Exemple d'un signal créneau



Utilisation de 3 sinus pour décrire le signal créneau



Utilisation de 15 sinus pour décrire le signal créneau

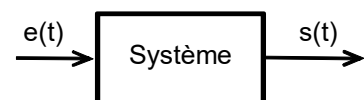
Exemple de décomposition en signaux sinusoïdaux

## II Réponse fréquentielle (ou harmonique) des SLCI

### II.1 Caractéristiques du comportement fréquentiel

Soit un système linéaire continu et invariant d'entrée  $e(t)$  et de sortie  $s(t)$  caractérisé par l'équation différentielle à coefficients constants :

$$(i) \quad a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_0 e(t)$$



La solution de l'équation est la somme des **solutions générales** de l'équation sans second membre<sup>(3)</sup> (entrée nulle) et d'une **solution particulière** avec second membre (entrée sinusoïdale).

Les solutions **générales** dépendent des **conditions initiales** et caractérisent le **régime transitoire**. Pour un système stable, donc dissipatif, ces solutions convergent vers 0.

La solution **particulière** ne dépend pas des conditions initiales et caractérise le **régime permanent**.

Pour une entrée sinusoïdale, la **solution particulière est aussi un signal sinusoïdal de même pulsation** que l'entrée.

Le système étant linéaire, à pulsation d'entrée donnée, **l'amplitude du signal sinusoïdal de sortie est proportionnelle à l'amplitude du signal d'entrée**.

(3) équation homogène

(1) appelée aussi réponse forcée ou régime établi.

Tout SLCl, soumis à une **entrée harmonique** (sinusoïdale) de pulsation  $\omega$ , présente une réponse en **régime permanent**<sup>(1)</sup> **harmonique de même pulsation**, définie par un **gain**  $G(\omega) > 0$  et un **déphasage**  $\varphi(\omega)$  :

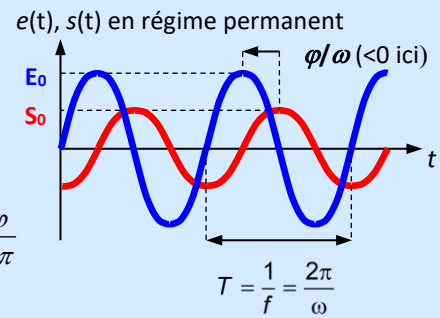
$$\text{si } e(t) = E_0 \sin(\omega t),$$

$$s(t) = S_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$s(t) = S_0 \sin(\omega(t + \Delta T))$$

$$\text{avec } \Delta T = \frac{\varphi}{\omega}, \text{ déphasage temporel, } \frac{\Delta T}{T} = \frac{\varphi}{2\pi}$$

$$\text{et } S_0 = G(\omega) E_0$$



Lorsque entrée et sortie sont comparables, si  $G(\omega) > 1$  la sortie est dite **amplifiée** ; si  $G(\omega) < 1$  la sortie est dite **atténuée**.

Si  $\varphi > 0$  la sortie est en **avance de phase** par rapport à l'entrée. Si  $\varphi < 0$  la sortie est en **retard de phase**.

**Gain et déphasage sont constants à  $\omega$  donné.**

**Les courbes de gain et de déphasage, fonction de  $\omega$ , caractérisent le comportement fréquentiel.**

## II.2 Gain, déphasage et fonction de transfert : $|G(\omega)| = |H(j\omega)|$ et $\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega))$

Pour déterminer la solution de l'équation différentielle linéaire (i), on pose les **variables complexes** :  $\underline{E}(t) = E_0 e^{j\omega t}$  et  $\underline{S}(t) = S_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$  avec  $e(t) = \text{Im}(\underline{E}(t))$  et  $s(t) = \text{Im}(\underline{S}(t))$ .

**Exemple :**

$$\text{Soit l'équation différentielle : } b \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + a \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \left( e(t) + \tau \frac{de(t)}{dt} \right)$$

$$\text{Avec } \underline{E}(t) = E_0 e^{j\omega t} : \quad \frac{d \underline{E}(t)}{dt} = (j\omega) E_0 e^{j\omega t} = (j\omega) \underline{E}(t) .$$

$$\text{De la même manière : } \quad \frac{d \underline{S}(t)}{dt} = (j\omega) S_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = (j\omega) \underline{S}(t)$$

$$\frac{d^2 \underline{S}(t)}{dt^2} = (j\omega)^2 S_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = (j\omega)^2 \underline{S}(t) .$$

En remplaçant ces termes dans l'équation différentielle on obtient :

$$b(j\omega)^2 \underline{S}(t) + a(j\omega) \underline{S}(t) + \underline{S}(t) = K(\underline{E}(t) + \tau(j\omega) \underline{E}(t)) \Leftrightarrow (b(j\omega)^2 + a(j\omega) + 1) \underline{S}(t) = K(1 + \tau(j\omega)) \underline{E}(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\underline{S}(t)}{\underline{E}(t)} = K \frac{1 + \tau(j\omega)}{1 + a(j\omega) + b(j\omega)^2} .$$

La fonction de transfert dans le domaine de Laplace de l'équation différentielle s'écrit :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = K \frac{1 + \tau p}{1 + ap + bp^2}$$

$$\text{On remarque que } \frac{\underline{S}(t)}{\underline{E}(t)} = H(j\omega) . \text{ De plus, } \frac{\underline{S}(t)}{\underline{E}(t)} = \frac{S_0 e^{j(\omega t + \varphi)}}{E_0 e^{j\omega t}} = \frac{S_0}{E_0} e^{j\varphi}, \text{ d'où } H(j\omega) = \frac{S_0}{E_0} e^{j\varphi}$$

$$\text{Par identification, on trouve les résultats fondamentaux suivants : } \frac{S_0}{E_0} = G(\omega) = |H(j\omega)| \text{ et } \varphi = \arg(H(j\omega)) .$$

### Généralisation

Les variables complexes vérifient l'équation différentielle :  $a_n \frac{d^n \underline{S}}{dt^n} + \dots + a_0 \underline{S} = b_m \frac{d^m \underline{E}}{dt^m} + \dots + b_0 \underline{E}$ .

Cette équation devient, après calcul des dérivées :  $a_n (j\omega)^n \underline{S} + \dots + a_0 \underline{S} = b_m (j\omega)^m \underline{E} + \dots + b_0 \underline{E}$  ;

soit finalement :  $\underline{S} = \frac{b_m (j\omega)^m + \dots + b_0}{a_n (j\omega)^n + \dots + a_0} \underline{E} = H(j\omega) \underline{E}$

On reconnaît la fonction de transfert du système où la variable de Laplace  $p$  a été remplacée par  $j\omega$ .

De plus, par définition de  $\underline{E}$  et  $\underline{S}$  :  $\frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{S_0}{E_0} e^{j\varphi} = G(\omega) e^{j\varphi}$ , d'où  $H(j\omega) = G(\omega) e^{j\varphi}$ .

En **analyse harmonique** (ou fréquentielle), **gain**  $G(\omega)$  et **déphasage**  $\varphi(\omega)$  s'obtiennent à partir de la **fonction de transfert** en remplaçant  $p$  par  $j\omega$  :

$$H(j\omega) = G(\omega) e^{j\varphi}$$

d'où

$$G(\omega) = |H(j\omega)|$$

et

$$\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega))$$

**Application** : considérons la fonction de transfert  $H(p) = \frac{1}{p} \frac{K}{(1 + \tau p)}$ ,  $K > 0$ .

A1 - Déterminer le gain  $G(\omega)$ ,  $G_{db}(\omega)$  et la phase  $\varphi(\omega)$ .

$$G(\omega) = |H(j\omega)| = \left| \frac{K}{j\omega(1 + j\tau\omega)} \right| = \frac{K}{\omega\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} \text{ avec } K > 0.$$

$$G_{db}(\omega) = 20\log(G(\omega)) = 20\log(K) - 20\log(\omega) - 10\log(1 + \tau^2\omega^2)$$

$$\varphi(\omega) = \arg(K) - \arg(j\omega) - \arg(1 + j\tau\omega) = 0 - \pi/2 - \arctan(\tau\omega)$$

A2 - Déterminer le gain, le gain en décibel et la phase (en °) pour  $\omega = 6 \text{ rad/s}$ ,  $K = 10$ ,  $\tau = 5 \text{ s}$ .

$$G(6) = \frac{K}{\omega\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} = \frac{10}{6\sqrt{1 + 5^2 \cdot 6^2}} \approx 0,056$$

$$G_{db}(22) \approx 20\log(0,056) \approx -25 \text{ dB}$$

$$\varphi(22) = -\pi/2 - \arctan(5 \times 6) \approx -3,1 \text{ rad, soit } -178^\circ$$

## II.3 Les diagrammes de Bode, lieu de transfert pour les études fréquentielles

### Définition

Une représentation **graphique** de  $H(j\omega)$  est appelée **lieu de transfert**. Les **diagrammes de Bode** sont la représentation la plus connue.

Les **diagrammes de Bode** sont constitués de deux courbes **fonction de la pulsation**  $\omega$ , en échelle semi-logarithmique, tracées l'une en dessous de l'autre :

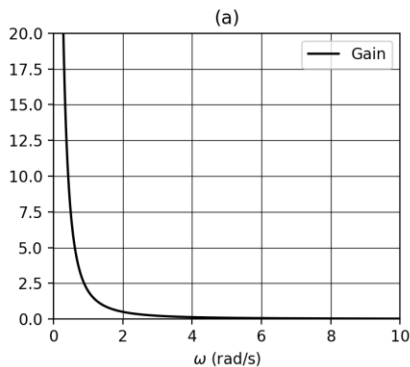
- le **diagramme de gain**  $G_{dB}(\omega) = 20\log(G(\omega))$ , gain en **dB**, dB pour décibel<sup>(1)</sup>,
- le **diagramme de phase**  $\varphi(\omega)$ , exprimé généralement en degrés.

(1) pour des raisons historiques et pratiques issues de l'acoustique.

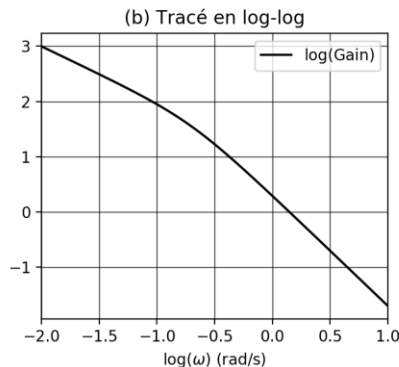
### Principe de la représentation du diagramme de gain : semi-log et décibel

**Exemple :** la figure ci-dessous représente différents tracés du gain de la fonction étudiée dans l'application précédente. Les tracés sont réalisés pour des pulsations comprises entre 0,01 rad/s et 10 rad/s. Quelques remarques :

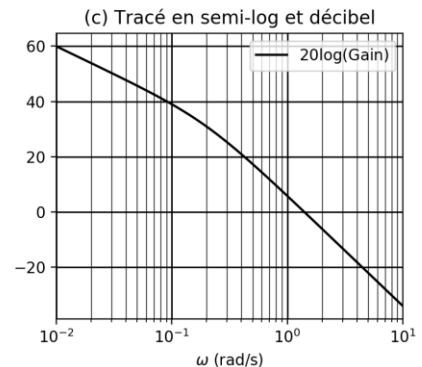
- le tracé (a) réalisé sur toute la plage de valeur ne permet pas une analyse précise des basses et hautes fréquences ;
- le tracé (b), en échelle log-log permet de visualiser des comportements asymptotiques sous la forme de droites ;
- le tracé (c) est le tracé usuel, identique au tracé (b) mais avec des échelles différentes : l'abscisse est en décibel, ce qui est une unité logarithmique ; l'ordonnée est  $\log(\omega)$  mais le quadrillage est celui de  $\omega$ , ce qui permet une lecture plus facile.



`plt.plot(w, G)`



`plt.plot(np.log10(w), np.log10(G))`



`plt.semilogx(w, 20*np.log10(G))`

Différents systèmes d'axe pour une même représentation du gain

#### Application : lire un gain

A3 - Sur les courbes précédentes, déterminer le gain pour  $\omega = 6$  rad/s.

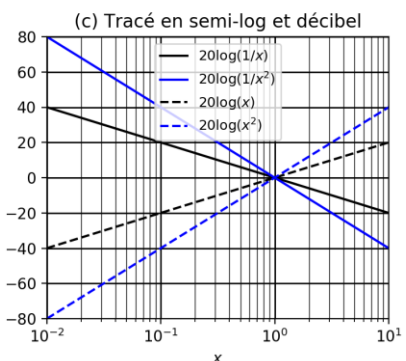
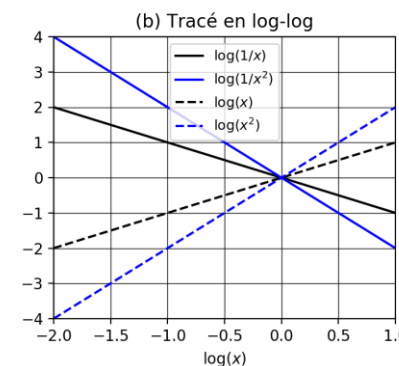
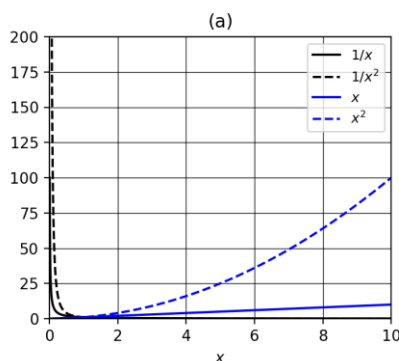
Non lisible sur la première courbe.

Sur la deuxième,  $\omega = 6$  rad/s ne se lit pas directement. Mais  $\log(6) \approx 0,78$ , d'où  $10^{-1,3} \approx 0,050$ .

Sur la troisième courbe :  $\omega = 6$  rad/s se trouve directement.  $G_{dB}(6) \approx -25$  db, soit  $G(6) \approx 10^{-25/20} \approx 0,056$

Un des intérêts de ce système d'axe est de représenter, sous la forme de droites, des fonctions en puissances. En effet, si  $y(x) = x^p$ ,  $20 \log y = 20 p \times \log(x)$ . En posant, pour une représentation en décibel et semi-log,  $Y = 20 \log y$  et  $X = \log x$ , on obtient bien  $Y = 20 p X$  ; droite de pente  $20 p$  décibels par décade. Ainsi :

- $x \rightarrow 1/x$  est représentée par une droite à -20 db/décade ;
- $x \rightarrow 1/x^2$  est représentée par une droite à -40 db/décade.



Différentes représentations de fonctions de  $x^p$  avec  $p$  valant -1, -2, 1 et 2

Dans un **diagramme de gain**, exprimé en décibel et tracé en échelle semi-log, une fonction  $\omega \rightarrow K\omega^p$  est représentée par une **droite** de pente  $20 \times p$  dB/décade.

### Caractéristiques d'un diagramme de Bode

#### Application : déterminer la réponse à partir des diagrammes de Bode

Le système, caractérisé par les diagrammes de Bode ci-contre, est soumis à une entrée sinusoïdale de pulsation 40 rad/s.

A4 - Déterminer la réponse en régime permanent ?

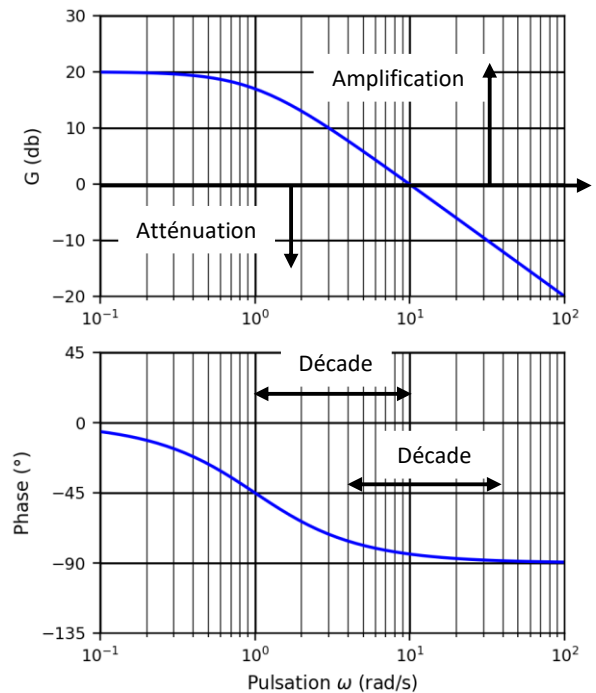
Il s'agit d'un signal sinusoïdal :

- de même pulsation :
- d'amplitude diminuée de  $G_{dB} = -12$  dB, soit :  
 $20 \log G = -12$ ,  
 $G = 10^{-12/20} = 0,25$
- déphasé de  $-90^\circ$  environ.

D'où la réponse :

$$S(t) = 0,25 E_0 \sin(\omega t - \pi/2)$$

Attention, la phase doit être en radians.



Quelques caractéristiques importantes des diagrammes de Bode :

- l'écart entre  $\omega$  et  $10\omega$  est une **décade** ;
- sur l'échelle logarithmique, il n'y a **pas d'origine** des abscisses (pas de 0) et le tracé ne concerne qu'une bande de pulsations choisie sur 3 ou 4 décades ;
- le passage en **décibel** correspond à un **changement d'unité** ;
- un gain de **0 dB** correspond à un **gain de 1**, soit  $E_0$  et  $S_0$  de même amplitude ;
- un **gain en dB positif** correspond à un **gain supérieur à 1**,  $S_0 > E_0$  ;
- un **gain en dB négatif** correspond à un **gain inférieur à 1**,  $S_0 < E_0$  ;
- **20 dB** ( $=20\log 10$ ) correspondent à un **facteur 10** sur le gain, -20dB à un facteur 1/10.
- **40 dB** ( $=20\log 10^2$ ) correspondent à un **facteur 100**, -40dB à un facteur 1/100, etc.
- **-3 dB** correspond à une atténuation de **30%**, **-6 dB** correspond à **-50%**.

## II.4 Comportement aux basses fréquences (gain, intégrateur, dérivateur)

Soit une fonction de transfert sous forme canonique  $H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + \dots + b_m p^m}{1 + \dots + a_n p^n}$ .

Le comportement aux basses fréquences est défini pour des pulsations suffisamment petites.

$$H(j\omega) \Big|_{\omega \rightarrow 0} = \frac{K}{(j\omega)^\alpha} \frac{1 + \dots + b_m (j\omega)^m}{1 + \dots + a_n (j\omega)^n} \Big|_{\omega \rightarrow 0} = \frac{K}{(j\omega)^\alpha}.$$

Le **comportement aux basses fréquences** est défini par le **gain** et la **classe** du système.

On en déduit, aux basses fréquences :  $G(\omega) = \frac{K}{\omega^\alpha} \Rightarrow G_{dB}(\omega) = 20\log K - 20\alpha \log \omega$ , droite à  $-20\alpha$  dB/décade.

(1) si  $\alpha$  différent de 0

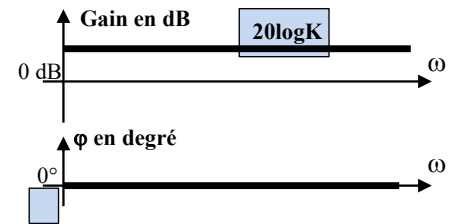
$G(\omega) = 1 \Leftrightarrow \omega = K^{1/\alpha}$  : la droite<sup>(1)</sup> passe par 0 db pour la pulsation  $K^{1/\alpha}$ . Si  $K > 0$ , la phase vaut  $\varphi(\omega) = -\alpha \frac{\pi}{2}$ .

Les résultats à connaître sont les courbes et leurs éléments caractéristiques (pentes, point de passage). On suppose ici  $K > 0$

### Diagramme de Bode d'un système à action proportionnelle

$$H(p) = K \quad (K > 0) \Rightarrow H(j\omega) = K$$

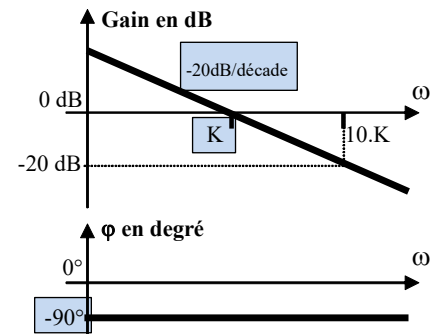
Droite horizontale. Phase nulle.



### Diagramme de Bode d'un système intégrateur

$$H(p) = \frac{K}{p} \quad (K > 0) \Rightarrow H(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$$

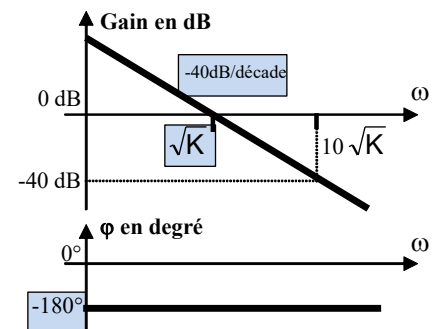
Droite à -20 db / décade  
de gain nul en  $K$ . Phase à  $-90^\circ$



### Diagramme de Bode d'un système intégrateur de degré 2

$$H(p) = \frac{K}{p^2} \quad (K > 0) \Rightarrow H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2} = \frac{-K}{\omega^2}$$

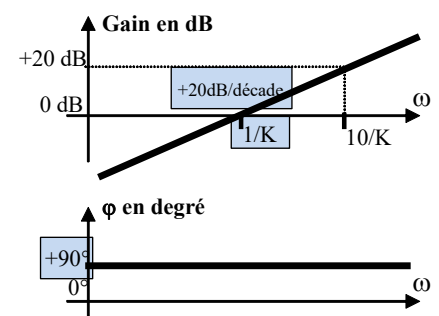
Droite à -40 db / décade  
de gain nul en  $\sqrt{K}$ . Phase à  $-180^\circ$



### Diagramme de Bode d'un système dérivateur

$$H(p) = K p \quad (K > 0) \Rightarrow H(j\omega) = K j\omega$$

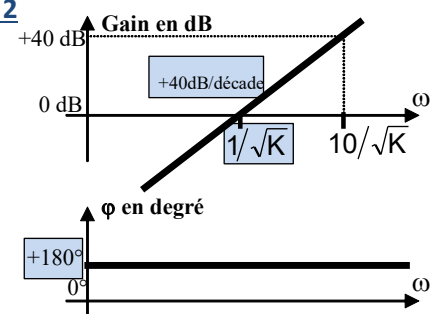
Droite à +20 db / décade  
de gain nul en  $1/K$ . Phase à  $+90^\circ$



### Diagramme de Bode d'un système dérivateur de degré 2

$$H(p) = K p^2 \quad (K > 0) \Rightarrow H(j\omega) = K(j\omega)^2 = -K\omega^2$$

Droite à +40 db / décade  
de gain nul en  $1/\sqrt{K}$ . Phase à  $+180^\circ$

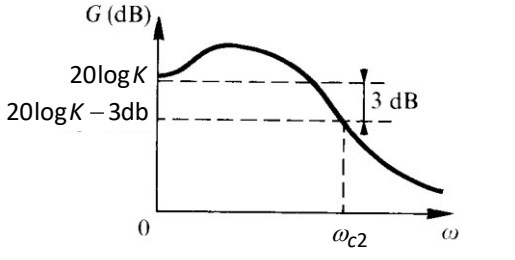




## II.5 Filtres, bande passante et pulsation de coupure

(1) Ce gain de référence n'est pas nécessairement la valeur maximale du gain.

Le système étudié est un filtre ou a un **comportement de filtre** si, en dehors d'une **plage de pulsation** appelée **bande passante** et délimitée par des **pulsations de coupure**, le gain est plus faible qu'un **gain de référence** <sup>(1)</sup>.

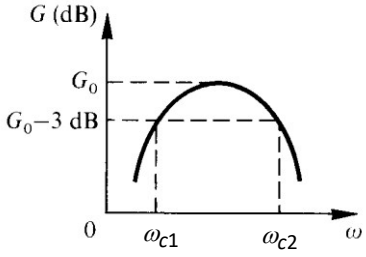
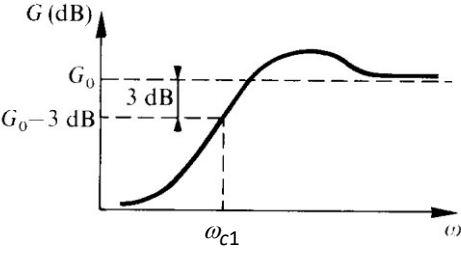
<b>Classe 0 - Filtre passe-bas</b> (gain de référence = gain statique = gain aux basses fréquences)		Le système laisse passer les <b>basses fréquences</b> La bande passante est $] 0, \omega_{c2} ]$
--	--	---

Dans leur grande majorité, les systèmes linéaires rencontrés en automatique et particulièrement les systèmes mécaniques, présentent un comportement fréquentiel de filtre passe-bas.

Si la pulsation de l'entrée est faible, le système peut suivre la consigne et sa réponse n'est pratiquement pas altérée : rapport d'amplitude défini par le gain statique et déphasage quasi nul.

En revanche, si les variations de l'entrée sont trop rapides, le système ne peut les suivre et sa réponse se traduit par une forte atténuation d'amplitude, associée à un déphasage important.

Un système asservi stable a nécessairement un comportement de filtre passe-bas.

<b>Filtre passe-bande</b> (gain de référence = gain maximal)		Le système laisse passer une <b>bande de fréquence</b> . La bande passante est $[ \omega_{c1}, \omega_{c2} ]$
<b>Filtre passe-haut</b> (gain de référence = gain à haute fréquence)		Le système laisse passer les <b>hautes fréquences</b> La bande passante est $[ \omega_{c1}, +\infty [$

Nous retiendrons en 1<sup>ère</sup> année :

Critère	Détermination à partir du gain	Détermination à partir du gain en dB
<b>Pulsation de coupure à -3 dB</b> $\omega_{c-3dB}$ gain atténué de 30% par rapport à une valeur de référence $G_0$	$G(\omega_{c-3dB}) = 70\% G_0$ $= 0,7 \times G_0$	$G_{dB}(\omega_{c-3dB}) = G_{0\,dB} - 3dB$
<b>Pulsation de coupure à -6 dB</b> $\omega_{c-6dB}$ gain atténué de 50% par rapport à une valeur de référence $G_0$	$G(\omega_{c-6dB}) = 50\% G_0$ $= 0,5 \times G_0$	$G_{dB}(\omega_{c-6dB}) = G_{0\,dB} - 6dB$

### III Construction d'un diagramme de Bode

#### III.1 Propriétés pour la construction d'un diagramme de Bode

##### Forme générale des fonctions de transfert

Les modèles étudiés sont :

- des modèles usuels : premier ou deuxième ordre ;
- des modèles associés à des fonctions de transfert écrites comme combinaison de modèles usuels pour l'étude de la boucle ouverte (de l'image de l'erreur à l'image de la réponse).

Pour une fonction de transfert sous **forme canonique**,  $H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+\dots}{1+\dots}$

- le terme  $\frac{K}{p^\alpha}$ , ou  $Kp$ , caractérise le **comportement à basse fréquence**
- le terme complémentaire est écrit comme un **produit de fonctions de transfert de gain unitaire**.

Pour l'analyse fréquentielle, les **fonctions de transferts** s'écrivent sous la forme suivante :

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \times \underbrace{\frac{1}{\prod (1 + \tau_i p)}}_{\text{Produit de 1<sup>er</sup> ordre}} \times \underbrace{\frac{1}{\prod (1 + a_i p + b_i p^2)}}_{\text{Produit de 2<sup>ème</sup> ordre}} \times \underbrace{\prod (1 + \tau_i p)}_{\text{Produit d'inverses de 1<sup>er</sup> ordre}} \times \underbrace{\prod (1 + a_i p + b_i p^2)}_{\text{Produit d'inverses de 2<sup>ème</sup> ordre}}$$

##### Propriété des diagrammes de Bode : produit de fonctions et inverse d'une fonction

(1) car

$$G(\omega) = |H(j\omega)| \\ = |A(j\omega)| \times |B(j\omega)|$$

d'où

$$G_{HdB}(\omega) = 20 \log |A(j\omega)| \\ + 20 \log |B(j\omega)|$$

De même pour l'argument :

$$\varphi_H(\omega) = \arg(H(j\omega)) \\ = \arg(A(j\omega)) \\ + \arg(B(j\omega))$$

(2) cette propriété sera très pratique pour tracer rapidement un diagramme.

Si  $H(p) = A(p)B(p)$  alors<sup>(1)</sup> :

$$\begin{aligned} G_{HdB}(\omega) &= G_{AdB}(\omega) + G_{BdB}(\omega) \\ \varphi_H(\omega) &= \varphi_A(\omega) + \varphi_B(\omega) \end{aligned}$$

Les **modules en dB** et les **arguments** en degrés **s'ajoutent** quand les fonctions de transfert se **multiplient**.

On ajoute les 2 diagrammes de  $A(j\omega)$  et  $B(j\omega)$ , pour déterminer le diagramme de  $H(j\omega)$ .

L'étude des diagrammes de Bode des fonctions du 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> ordre usuelles et de gain unitaire montre que le gain en décibel et la phase sont nuls à basse fréquence.

Lorsque l'on **ajoute** à un diagramme existant le diagramme d'une fonction du 1<sup>er</sup> ou du 2<sup>ème</sup> ordre usuelle, de **gain unitaire**, le **diagramme à basse fréquence n'est pas modifié**<sup>(2)</sup> car un gain unitaire correspond à 0 dB.

Si  $H(p) = 1/F(p)$  alors<sup>(1)</sup> :

$$\begin{aligned} G_{HdB}(\omega) &= -G_{FdB}(\omega) \\ \varphi_H(\omega) &= -\varphi_F(\omega) \end{aligned}$$

Les diagrammes des **inverses de 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> ordre de gain unitaire** se déduisent des diagrammes des 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> ordre par **symétrie par rapport aux axes des abscisses**.

### III.2 Diagramme de Bode d'un système du 1<sup>er</sup> ordre

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{K}{1 + \tau j\omega} \Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20\log|H(j\omega)| = 20\log K - 20\log\sqrt{1 + \tau^2\omega^2} \\ \varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = -\arg(1 + \tau j\omega) = -\arctan(\tau\omega) \end{cases}$$

#### Comportement asymptotique

Pour  $\omega \rightarrow 0^+$ ,  $H(j\omega)|_{\omega \rightarrow 0} = K$  d'où :

Le comportement fréquentiel à **basse fréquence** est celui d'un **gain pur** de gain  $K$ .

Pour  $\omega \rightarrow +\infty$ ,  $H(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = \frac{K}{\tau j\omega}$  d'où :

Le comportement fréquentiel à **haute fréquence** est celui d'un **intégrateur**.

#### Gain et phase à $\omega_{cassure} = \omega_{coupure}$

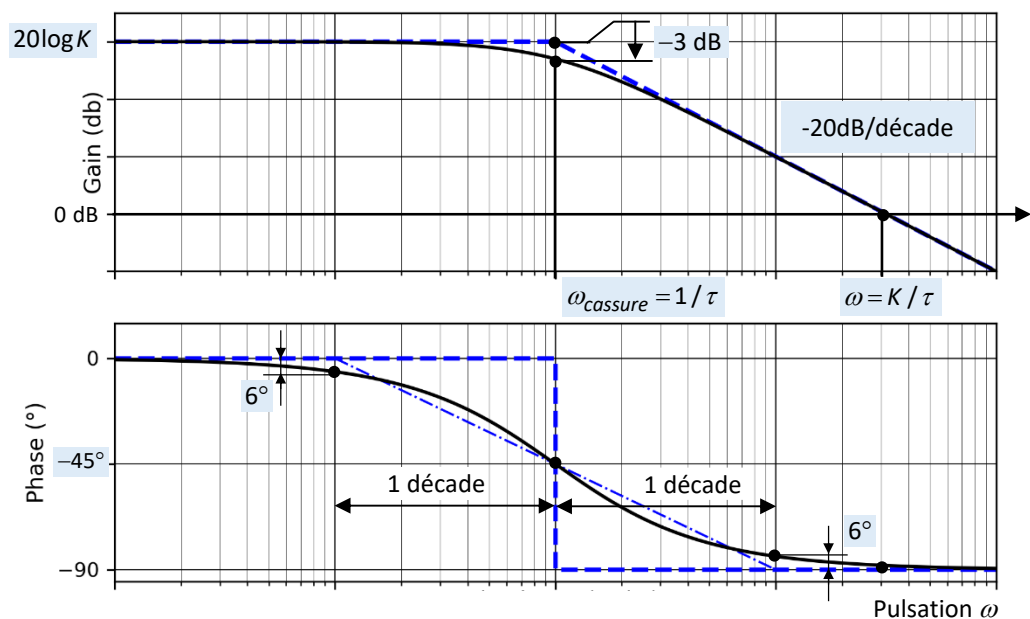
La **pulsation de cassure**,  $\omega_{cassure}$  correspond à la pulsation du point **d'intersection des asymptotes** du diagramme de gain.

Il s'agit de trouver  $\omega_{cassure}$  telle que le gain du comportement à basse fréquence soit identique au gain du comportement à haute fréquence :  $K = \frac{K}{\tau \omega_{cassure}} \Rightarrow \omega_{cassure} = 1/\tau$ .

De plus,  $G_{dB}(\omega_{cassure}) = 20\log K - 20\log\sqrt{2} \approx G_{0dB} - 3dB = G_{dB}(\omega_{c-3dB})$

Pour un 1<sup>er</sup> ordre la pulsation de **coupure** à **-3dB** est la pulsation de **cassure** :

$$\omega_{c-3dB} = \omega_{cassure} = \frac{1}{\tau} \quad \varphi(\omega_{cassure}) = -\arctan(1) = -45^\circ$$



### III.3 Diagramme de Bode d'un système du 2<sup>ème</sup> ordre

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}(j\omega) + \frac{1}{\omega_0^2}(j\omega)^2} = \frac{K}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + j 2z \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{K}{(1-u^2) + j 2zu} \quad \text{avec} \quad u = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \text{pulsation}$$

réduite. D'où :

$$\begin{cases} G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4z^2u^2}} \\ G_{dB}(\omega) = 20\log|H(j\omega)| = 20\log K - 20\log\sqrt{(1-u^2)^2 + 4z^2u^2} \\ \varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{2zu}{1-u^2}\right) & \text{si } u < 1 \\ -90^\circ & \text{si } u = 1 \quad (\omega = \omega_0) \\ -180^\circ + \arctan\left(\frac{2zu}{u^2-1}\right) & \text{si } u > 1 \end{cases} \end{cases}$$

#### Comportement asymptotique et pulsation de cassure

Pour  $\omega \rightarrow 0^+$ ,  $H(j\omega)|_{\omega \rightarrow 0} = K$  d'où :

Le comporte fréquentiel à **basse fréquence** est celui d'un **gain pur** de gain **K**.

Pour  $\omega \rightarrow +\infty$ ,  $H(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = -K \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$  d'où :

Le comporte fréquentiel à **haute fréquence** est celui d'un **intégrateur de degré 2**.

Pour  $\omega_{cassure}$  le gain du comportement à basse fréquence est identique au gain du comportement à

haute fréquence :  $K = K \frac{\omega_0^2}{\omega_{cassure}^2} \Rightarrow \omega_{cassure} = \omega_0$ .

$\omega_{cassure}$  correspond à  $u = 1$ , soit à  $G_{dB}(\omega_0) = 20\log K - 20\log\sqrt{4z^2} = 20\log K - 20\log(2z)$

Pour un deuxième ordre, la **pulsation de cassure** est  $\omega_{cassure} = \omega_0$  :

$$G_{dB}(\omega_{cassure}) - 20\log K = -20\log(2z) \quad \text{et} \quad \varphi(\omega_{cassure}) = -90^\circ$$

#### Extremum de $G(\omega)$ : résonance pour $z < 1/\sqrt{2} \approx 0,7$

Un extremum de  $G(\omega)$  existe si  $P(u) = (1-u^2)^2 + 4z^2u^2$  a un extremum, soit si  $\frac{dP(u)}{du}$  s'annule,

avec  $\frac{dP(u)}{du} = 2(-2u) \times (1-u^2) + 4z^2 \times 2u = 4u(2z^2 - 1 + u^2)$ .

$$\frac{dP(u)}{du} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \quad (\text{soit } \omega = 0) \Rightarrow \text{impossible en régime fréquentielle} \\ u^2 = 1 - 2z^2 \Rightarrow \text{possible si } 1 - 2z^2 > 0 \quad \text{soit } z < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{et pour } u = \sqrt{1-2z^2}, \quad G_{dB}(\omega_r) &= 20\log K - 20\log\sqrt{(2z^2)^2 + 4z^2(1-2z^2)} \\ &= 20\log K - 20\log\sqrt{4z^2(z^2 + 1 - 2z^2)} = 20\log K - 20\log\left(2z\sqrt{1-z^2}\right) \end{aligned}$$

(1) à ne pas confondre avec la pulsation amortie de la réponse temporelle à un échelon :

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - z^2}$$

Pour  $0,7 < z < 1$ , la réponse à un échelon présente des dépassements, mais la réponse fréquentielle ne présente pas de résonance.

Si  $z < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$ , le gain présente une résonance à la pulsation de résonance<sup>(1)</sup>

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2z^2}$$

$$G_{dB}(\omega_r) - 20\log K = Q_{dB} \text{ avec } Q_{dB} = -20\log\left(2z\sqrt{1 - z^2}\right)$$

$Q_{dB}$ , **facteur de surtension** varie de 0 à  $+\infty$  quand  $z$  varie de 0,7 à 0, écart en db entre le comportement basse fréquence et le gain à la résonance.

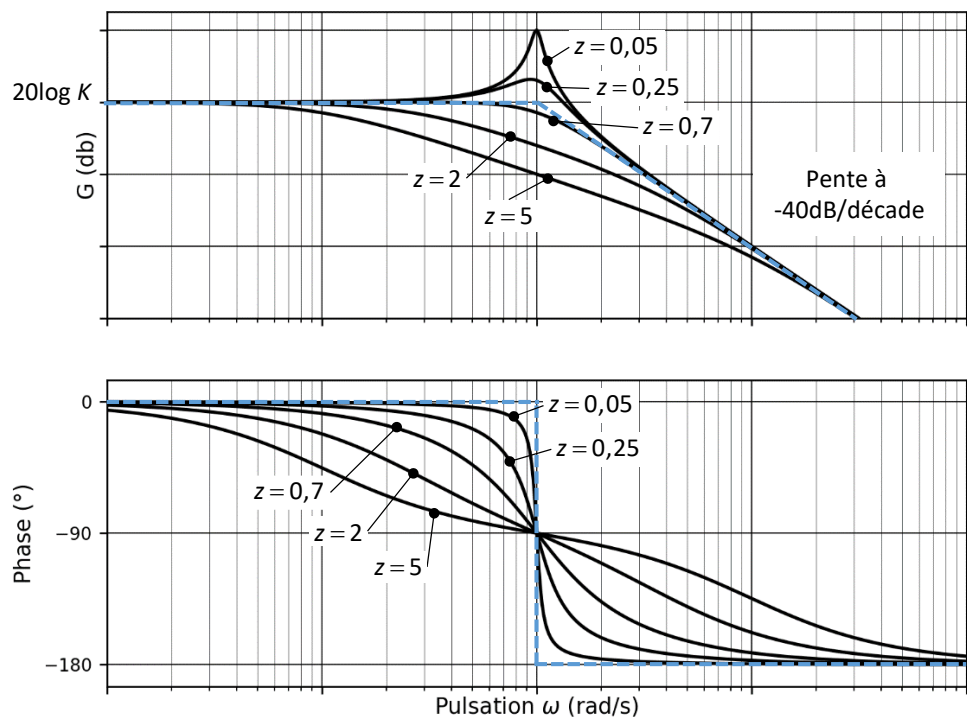
Si  $z > 0,7$ , la courbe de gain est **strictement décroissante**.

$\varphi(\omega_r)$  n'est pas une valeur particulière.

La définition du facteur de surtension permet aussi d'écrire :  $Q = \frac{G(\omega_r)}{G(0+)} = \frac{|H(j\omega_r)|}{|H(j\omega)_{\omega \rightarrow 0}|} = \frac{1}{2z\sqrt{1 - z^2}}$ .

$Q$  varie de 1 à  $+\infty$  quand  $z$  varie de 0,7 à 0 ;

Exemples :



**Cas où  $z > 1$  : le dénominateur possède 2 racines réelles**

$$\text{Pour } z > 1, H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2} = K \frac{1}{(1 + T_1 p)} \cdot \frac{1}{(1 + T_2 p)} \text{ avec } \omega_0 = 1 / \sqrt{T_1 T_2}$$

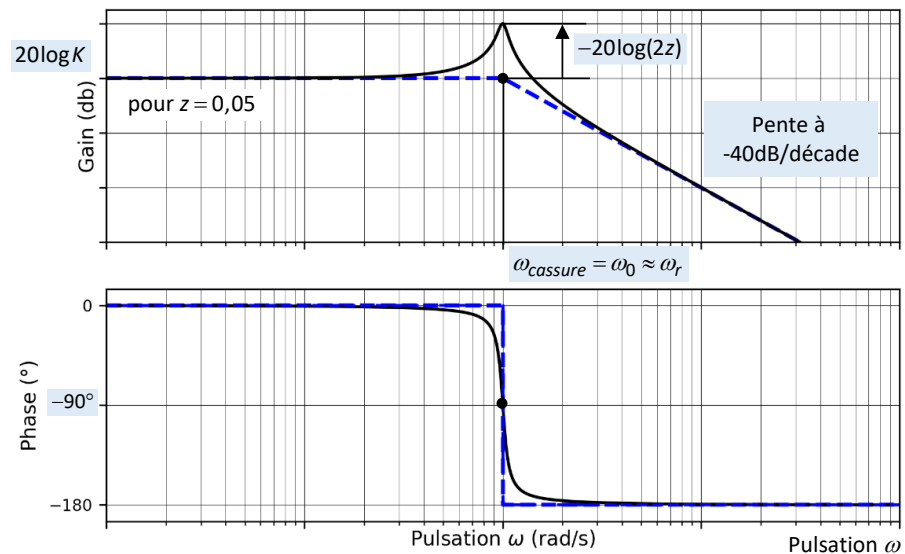
qui est un **produit de 3 fonctions de transfert** : 1 système à action proportionnelle et 2 systèmes du 1<sup>er</sup> ordre de constantes de temps  $T_1$  et  $T_2$ .

Leurs diagrammes de Bode s'additionnent.

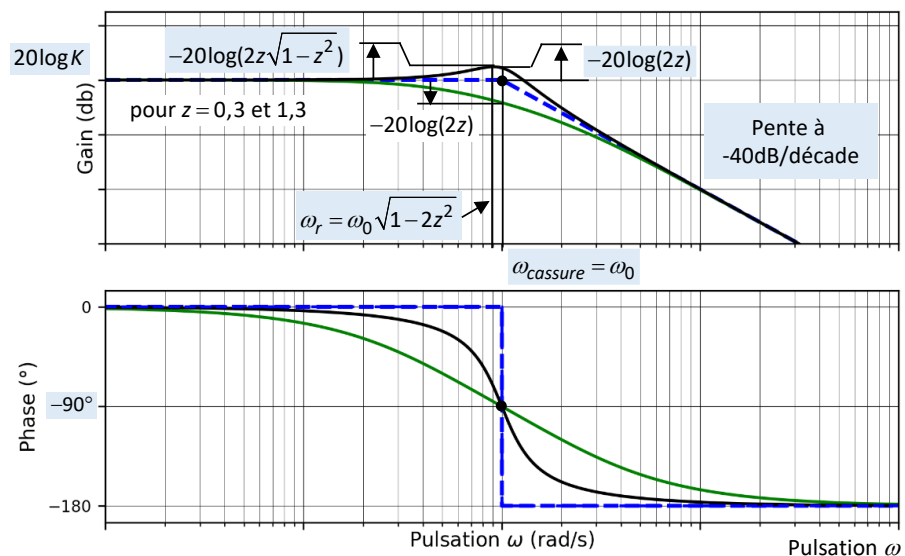
**Le diagramme asymptotique est plus précis que celui tracé avec le 2<sup>nd</sup> ordre du départ...**

### Exemples de tracés

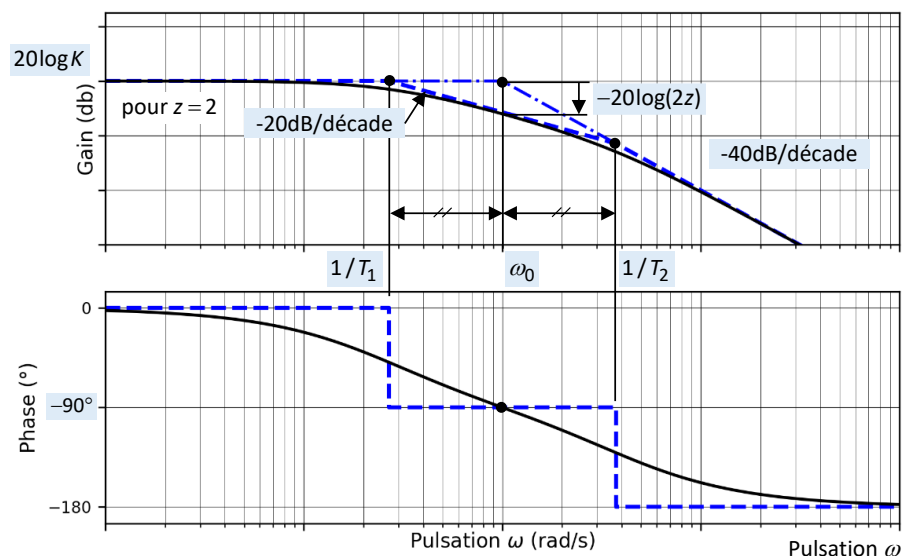
- Pour  $z \ll 1$  : les pulsations de cassure et de résonance sont proches



- Pour  $z$  proche de 1 : on peut distinguer les pulsations de cassure et de résonance (si  $z < 0,7$ )



- Pour  $z > 1,5$  : la courbe peut être tracée comme le produit de 2 premiers ordre



Pour  $z > 3$ , on peut considérer que la courbe de phase passe par  $-45^\circ$  et  $-135^\circ$ .

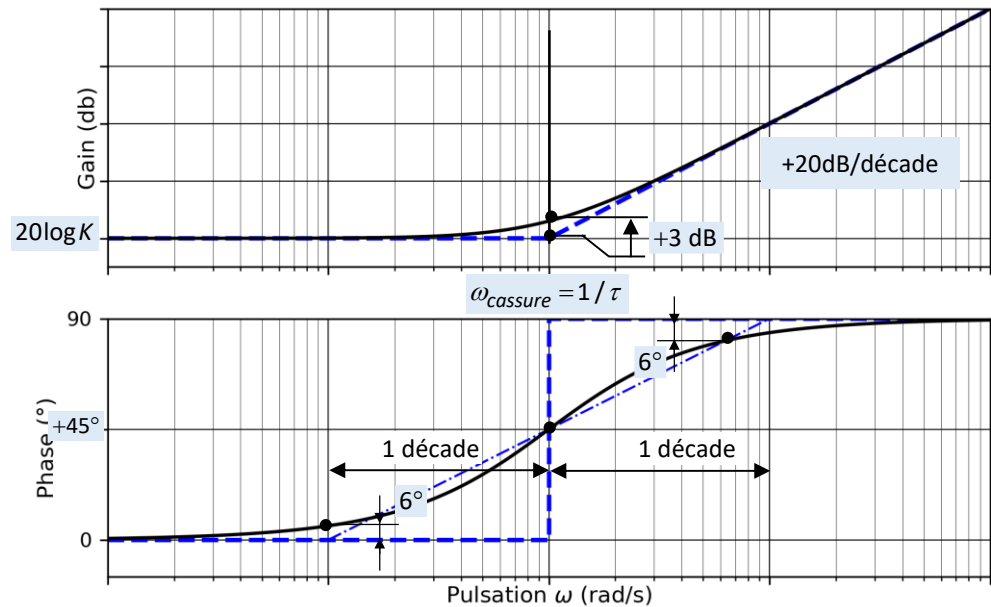
### III.4 Inverses d'un premier et deuxième ordre

Les courbes et propriétés se déduisent directement de celles d'un premier et deuxième ordre.

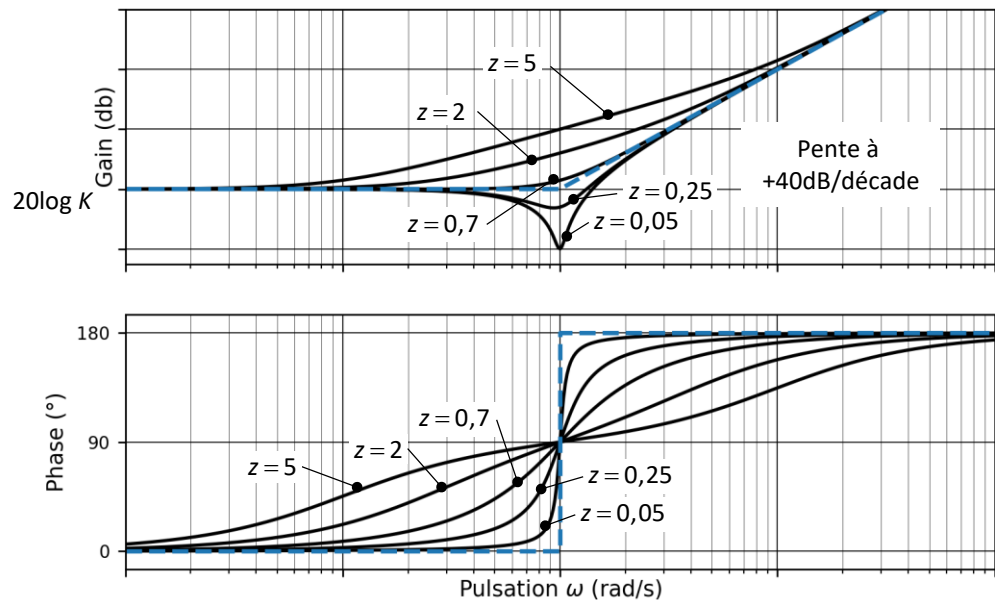
Entre  $H(p)$  et  $1/H(p)$  :

- les **pulsations de cassure** et de **résonance** sont **identiques** ;
- les **écarts aux tracés asymptotiques** des courbes réelles sont **opposés**.

**Exemple** pour un 1<sup>er</sup> ordre avec  $H(p) = K(1 + \tau p)$  :



**Exemple** pour des 2<sup>ème</sup> ordres avec  $H(p) = K \left( 1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)$



#### IV Méthode générale de construction des diagrammes de Bode

Le principe de tracé d'un diagramme de Bode consiste à factoriser le numérateur et le dénominateur de  $H(j\omega)$  pour en faire un produit de fonctions de transfert élémentaires connues et faciles à tracer dans Bode.

**Étape n°1 :** mettre la **fonction de transfert** sous la forme d'un **produit d'éléments simples** du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>nd</sup> ordre, de leurs inverses, d'un gain et d'intégrateurs multiples.

Comportement basse fréquence

Produit d'inverses de 1<sup>er</sup> ordre

Produit d'inverses de 2<sup>ème</sup> ordre

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \times \frac{1}{\prod (1 + \tau_i p)} \times \frac{1}{\prod (1 + a_i p + b_i p^2)} \times \prod (1 + \tau_i p) \times \prod (1 + a_i p + b_i p^2)$$

Produit de 1<sup>er</sup> ordre

Produit de 2<sup>ème</sup> ordre

**Étape n°2 : classer les pulsations de cassures par valeurs croissantes** ( $1/\tau_i$  pour un 1<sup>er</sup> ordre et  $\omega_0$  pour un 2<sup>nd</sup> ordre). Les cassures du tracé asymptotique correspondront alors à ces pulsations.

**Étape n°3 : Tracer le comportement aux basses fréquences du diagramme de gain, puis en avançant vers les pulsations croissantes, changer la pente du diagramme asymptotique à chaque pulsation de cassure.**

**Étape n°4 : Tracer le diagramme de phase** asymptotique en partant des basses fréquences.

Il existe un lien entre la **pente d'un segment** du diagramme asymptotique de gain et la phase associée :

pour une pente de  $k \times 20$  dB/decade, alors,  $\varphi = k \times 90^\circ$  .

**Étape n°4 : Compléter** les tracés asymptotiques des courbes réelles si demandé.

## V Comparaison des études temporelle et fréquentielle en FTBF

La **fonction de transfert en boucle fermée, FTBF**, correspond à la fonction de transfert du système asservi.

FTBF que l'on distingue de la FTBO, fonction de transfert en boucle ouverte, qui sera étudiée un peu plus tard.

## V.1 Stabilité de la FTBF

Un système stable étant de classe 0 ou négative, le comportement aux basses fréquences doit être :

- celui d'un gain pur : gain d'asymptote horizontale, déphasage nul ;
- ou celui d'un dérivateur : gain d'asymptote à +20db/decade, déphasage de +90°.

## V.2 Erreur statique de la FTBF

Un système est précis en poursuite s'il est de classe 0 (sans dérivateur) et de gain unitaire.

Le comportement basses fréquences doit être celui d'un gain pur unitaire, soit de 0dB : gain d'asymptote horizontale à 0dB, déphasage nul.



### V.3 Relation Bande passante de la FTBF et rapidité

Rappel : le critère de rapidité standard est le temps de réponse à 5%. Il est défini lorsqu'un système est soumis à un ECHELON.

#### Pour un 1<sup>er</sup> ordre

Le temps de réponse est défini par  $t_{5\%} \approx 3.\tau$

La bande passante à -3 dB est  $]0, \omega_c]$  avec  $\omega_{c-3dB} = \omega_{cassure} = \frac{1}{\tau}$

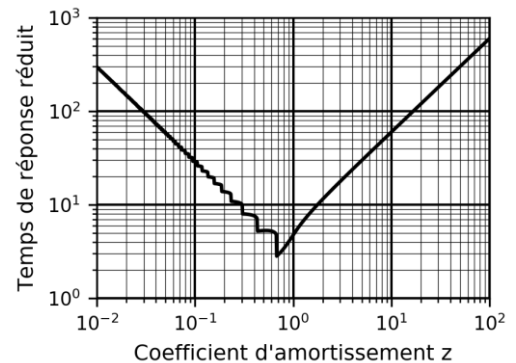
Donc rapidité du système  $\uparrow \Rightarrow t_{5\%} \downarrow \Rightarrow \tau \downarrow \Rightarrow \omega_{c-3dB} \uparrow \Rightarrow$  bande passante  $\uparrow$

#### Pour un 2<sup>ème</sup> ordre

Le temps de réponse est défini par le graphe du « temps de réponse réduit  $t_{5\%}.\omega_0$  » ci-contre.

On remarque que pour un facteur d'amortissement constant, le temps de réponse réduit  $t_{5\%}.\omega_0$  est constant.

Pour **un  $z$  fixé**, rapidité du système  $\uparrow \Rightarrow t_{5\%} \downarrow$   
 $\Rightarrow \omega_0 = \omega_{cassure} \uparrow \Rightarrow \omega_{c-3dB} \uparrow \Rightarrow$  bande passante  $\uparrow$



#### Conclusion

**Une large bande passante caractérise un système rapide.**

C'est-à-dire que le système est apte à suivre des entrées variant rapidement ou des fréquences élevées.

## V.4 Synthèse sur les différents gains

Temporel	$K$	<b>Gain statique du système.</b> Il caractérise le comportement du système de classe 0 en <b>régime permanent</b> : $s(+\infty) = K E_c$ .
Fréquentiel	$G(\omega) =  H(j\omega)  = \left  \frac{S_0}{E_0}(\omega) \right $	<b>Gain (ou module) du système.</b> Il caractérise l'amplification ( $G > 1$ ) ou l'atténuation ( $G < 1$ ) du système en fonction de $\omega$ .
	$G_{dB}(\omega) = 20 \log  H(j\omega) $ $= 20 \log \left  \frac{S_0}{E_0}(\omega) \right $	<b>Gain (ou module) du système (en décibel).</b> Il caractérise l'amplification ( $G > 0\text{dB}$ ) ou l'atténuation ( $G < 0\text{dB}$ ) du système en fonction de $\omega$ .

## V.5 Synthèse sur les différentes pulsations

Toutes les pulsations ci-dessous sont en rad/s et sont positives.

Temporel	$\omega_0$ (notée parfois $\omega_n$ )	<b>Pulsation propre d'un système du 2<sup>e</sup> ordre.</b> (pulsation du système s'il n'était pas amorti).
	$\omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - z^2}$	<b>Pulsation amortie d'un système du 2<sup>ème</sup> ordre oscillatoire.</b> ( $z < 1$ ).
Fréquentiel	$\omega$	<b>Pulsation de l'entrée et de la sortie, sinusoïdales, du système, en régime permanent.</b>
	$\omega_{cassure}$	<b>Pulsation de cassure</b> (pulsation où les asymptotes des courbes de gain se coupent) : $\omega_{cassure} = \frac{1}{\tau}$ pour un 1 <sup>er</sup> ordre $\omega_{cassure} = \omega_0$ pour un 2 <sup>e</sup> ordre
	$\omega_c$	<b>Pulsation de coupure</b> (pulsation définissant la bande passante). Plusieurs critères sont utilisés : -3dB, -6dB ( $\omega_{c-3dB}$ , $\omega_{c-6dB}$ ). NB : Pour un 1 <sup>er</sup> ordre $\omega_{c-3dB} = \omega_{cassure} = \frac{1}{\tau}$
	$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2z^2}$	<b>Pulsation de résonance d'un système du 2<sup>ème</sup> ordre</b> (seulement pour $z < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$ ). Pulsation où le gain présente un maximum.

# Rappels sur les logarithmes et les complexes

## Sur les logarithmes en base 10

(1) Le logarithme utilisé est le logarithme en base 10.

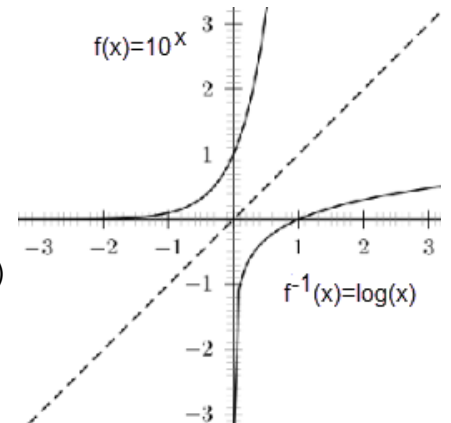
$X^{(1)}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	1	$10^1$	$10^2$
$\log(x)$	-2	-1	0	1	2

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

$$\log(a^n) = n \cdot \log(a)$$

$$10^{n \cdot \log(a)} = a^n$$



## Sur les nombres complexes

Soit  $z$  un nombre complexe tel que  $z = a + j \cdot b = |z| \cdot e^{j\varphi} = |z| \cdot (\cos \varphi + j \sin \varphi)$

alors  $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$  et  $\arg(z) = \varphi$

Soient  $z_i$  des nombres complexes :  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$  et  $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) [2\pi]$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = |z_1| \cdot \frac{1}{|z_2|} \text{ et } \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) [2\pi]$$

notamment  $\arg\left(\frac{K}{z_2}\right) = -\arg(z_2) [2\pi] \quad (\text{si } K > 0)$

**Remarque 1 :** si  $\varphi = -15^\circ [2\pi]$  alors  $\varphi$  vaut aussi  $345^\circ [2\pi]$

Mais on préférera dire que  $s(t)$  est en retard de phase de  $15^\circ$  plutôt que  $s(t)$  est en avance de phase de  $345^\circ$ .

**Remarque 2 :** Calcul d'argument

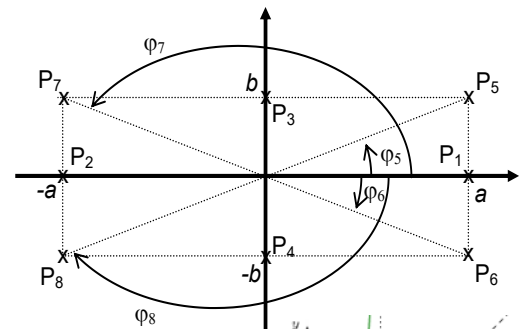
On pose  $a > 0$  et  $b > 0$  :

Au point  $P_1 : z_1 = a \Rightarrow \arg(P_1) = 0^\circ [2\pi]$

Au point  $P_2 : z_2 = -a \Rightarrow \arg(P_2) = 180^\circ [2\pi]$

Au point  $P_3 : z_3 = jb \Rightarrow \arg(P_3) = 90^\circ [2\pi]$

Au point  $P_4 : z_4 = -jb \Rightarrow \arg(P_4) = -90^\circ [2\pi]$

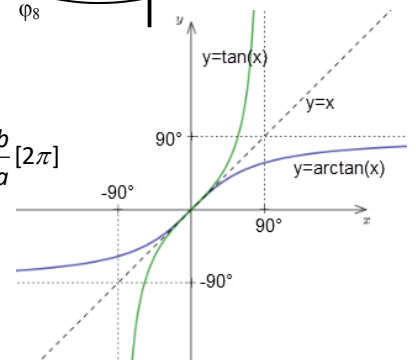


Au point  $P_5 : z_5 = a + j \cdot b \Rightarrow \arg(P_5) = \varphi_5 = \arctan \frac{b}{a} [2\pi]$

Au point  $P_6 : z_6 = a - j \cdot b \Rightarrow \arg(P_6) = \varphi_6 = \arctan \frac{-b}{a} = -\arctan \frac{b}{a} [2\pi]$

Au point  $P_7 : z_7 = -a + j \cdot b \Rightarrow \arg(P_7) = \varphi_7 = 180^\circ - \arctan \frac{b}{a} [2\pi]$

Au point  $P_8 : z_8 = -a - j \cdot b \Rightarrow \arg(P_8) = \varphi_8 = 180^\circ + \arctan \frac{b}{a} [2\pi]$



Arctan étant compris entre  $-90^\circ$  et  $+90^\circ$ , il est nécessaire de prendre en compte  $+180^\circ$  pour déterminer l'argument (ou le déphasage) aux points  $P_7$  et  $P_8$

Quand la partie **réelle** du complexe est **négative**, on détermine la **phase** en ajoutant  **$+180^\circ$**  à l'angle déterminé par l'**arc tangente**.

Et :  $\varphi = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ , donne un angle compris entre 0 et  $\pi$ .

## Savoirs

Je connais :

- ☐ les conditions et hypothèses associées à l'analyse fréquentielle
- ☐ les propriétés d'une réponse harmonique, son lien avec la fonction de transfert
- ☐ les informations présentes sur un diagramme de Bode
- ☐ la définition des pulsations de coupure
- ☐ les réponses fréquentielles des fonctions élémentaires (à action proportionnelle, intégrateur ou dérivateur)
- ☐ les caractéristiques des réponses fréquentielles des systèmes du premier et du deuxième ordre

## Savoir-faire

Je sais :

- ☐ Tracer le diagramme de Bode des fonctions élémentaires
- ☐ Tracer le diagramme de Bode d'un système du premier ou du deuxième ordre
- ☐ Tracer le diagramme de Bode d'un produit de fonctions élémentaires, de premiers, deuxièmes ordres et d'inverses de premiers et deuxièmes ordres
- ☐ Déterminer une fréquence de coupure sur un diagramme de Bode et analytiquement
- ☐ Identifier une fonction de transfert à partir d'un diagramme de Bode