DS 6
Continuité - Dérivabilité
Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 31 Janvier 2024

Problème 1 :

Partie 1 : Un théorème d'existence de limite

On va essayer de démontrer le théorème suivant :

Théorème 0.1

Si $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une fonctions Lipschitzienne au voisinage de 0, alors elle admet une limite finie en 0.

duquel nous déduirons le théorème 0.2.

1. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. Soit $r > 0$ et $K > 0$ tel que f soit K-Lipschitzienne sur $]0, r]$.

(a) Par définition de la lipschitziannité, on a

$$\forall x, y \in]0, r],\ |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

En particulier,

$$\forall x \in]0, r],\ |f(x) - f(r)| \leq K|x - r| < Kr.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\forall x \in]0, r],\ |f(x)| &= |f(x) - f(r) + f(r)| \\
&\leq |f(x) - f(r)| + |f(r)| && \text{inégalité triangulaire} \\
&\leq K|x - r| + |f(r)| && \text{lipchitziannité} \\
&\leq Kr + |f(r)| && \text{car } x \in]0, r]
\end{aligned}$$

Donc $|f|$ est bornée par $Kr + |f(r)|$ sur $]0, r]$ (avec une borne indépendant de la variable). Donc, par définition, f est bornée sur $]0, r]$.

Comme f est Lipschitzienne sur $]0, r]$, elle est continue sur $]0, r]$. On aurait pu être tenté d'utiliser un argument de continuité du genre du théorème des limites atteintes pour justifier du caractère bornée de f. Mais ça ne fonctionne que sur un intervalle fermé borné. Et on a la continuité que sur $]0, r]$. Il faudrait éventuellement avoir aussi la convergence de f en 0 pour pouvoir s'en sortir (par un prolongement par continuité par exemple ou parce que toute fonction convergente est bornée et voisinage de son point de convergence). Mais c'est le but du théorème. Donc, pour le moment, on pourrait très bien avoir une fonction f qui divergerait vers $\pm\infty$ en 0 (même si en réalité c'est impossible puisque le théorème nous affirme le contraire ; mais nous sommes dans la démonstration, donc nous ne le savons pas encore).

(b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]0,r]^{\mathbb{N}}$ qui converge vers 0. D'après la question précédente, f est bornée sur $]0,r]$. Donc la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée (par la même borne que f donc par $Kr + |f(r)|$). Donc, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente. Donc, par définition d'une sous-suite, $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extraction (donc strictement croissante) telle que $(f(u_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

On note $\ell = \lim_{n\to+\infty} f(u_{\varphi(n)}) \in \mathbb{R}$.

(c) On sait que $(f(u_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers ℓ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 0. En tant que sous-suite d'une suite convergente, $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers 0. Alors, par définition de la convergence,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_1,\ |u_{\varphi(n)}| \leq \frac{\varepsilon}{2K}$$

car $\frac{\varepsilon}{2K} > 0$ et

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_2,\ |f(u_{\varphi(n)}) - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ (avec } n_0 = \max(n_1,n_2)),\ \forall n \geq n_0,\ |u_{\varphi(n)}| \leq \frac{\varepsilon}{2K} \text{ et } |f(u_{\varphi(n)}) - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En particulier, pour $n = n_0 = \max(n_1, n_2)$, on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ |u_{\varphi(n_0)}| \leq \frac{\varepsilon}{2K} \text{ et } |f(u_{\varphi(n_0)}) - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

(d) Soit $\varepsilon > 0$. On a $u_{\varphi(n_0)} > 0$. Alors

$$\begin{aligned}
\forall x \in]0, u_{\varphi(n_0)}],\ |f(x) - \ell| &\leq |f(x) - f(u_{\varphi(n_0)})| + |f(u_{\varphi(n_0)}) - \ell| && \text{inégalité triangulaire} \\
&\leq K|x - u_{\varphi(n_0)}| + |f(u_{\varphi(n_0)}) - \ell| && \text{car } x, u_{\varphi(n_0)} \in]0,r] \text{ et } f \text{ lipschitzienne} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} && \text{cf 1c} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

On a donc, en posant $\eta = u_{\varphi(n_0)} > 0$,

$$\forall x \in]0,r] \cap [-\eta, \eta],\ |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Donc, par définition, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \ell$.

On vient de montrer que si f est Lipschitzienne au voisinage de 0 (*i.e.* si $\exists r, K > 0$ tel que f soit K-Lipschitzienne sur $]0,r]$), alors f a une limite finie en 0. Autrement dit, on vient de montrer le théorème 0.1.

2. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose $\exists \ell' \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \ell'$.

(a) Si f était définie en 0 et continue en 0, on pourrait appliquer le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$. Mais ce n'est pas le cas. En fait, il suffirait d'avoir une limite finie de f en 0 pour pouvoir appliquer le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ (car étant dérivable, elle est déjà continue). Mais c'est le but du théorème. On ne peut donc pas raisonnablement penser qu'il y a un moyen simple (plus simple que la démo que nous allons faire, en tous cas) pour démontrer cette limite (sinon le théorème serait caduque).

(b) f' est une fonction convergente en 0. Donc elle est bornée au voisinage de 0. C'est du cours. En effet, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall x \in]0, \eta]$, $|f'(x) - \ell'| \leq \varepsilon$. En appliquant la définition de la convergence avec $\varepsilon = 1$, par exemple, on obtient : $\exists \eta > 0$, $\forall x \in]0,\eta]$, $|f'(x) - \ell'| \leq 1$. Et par inégalité triangulaire (comme au dessus), $\forall x \in]0,\eta]$, $|f'(x)| \leq |f'(x) - \ell'| + |\ell'| \leq 1 + |\ell'|$. Et donc f' est bornée par $1 + |\ell'|$ sur $]0,\eta]$, un voisinage de 0.

(c) On vient de montrer que f' est bornée au voisinage de 0. Soit $r > 0$ tel que f' soit bornée sur $]0,r]$ et soir $K > 0$ une borne de f' sur cette intervalle. Donc $\forall x \in]0,r]$, $|f'(x)| \leq K$.

Or f est dérivable sur $]0,r]$. Donc, par inégalité des accroissements finis,

$$\forall x, y \in]0,r], |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Donc f est K-Lipschitzienne sur $]0,r]$. On peut alors utiliser le théorème 0.1 et en déduire que f converge en 0. Ce qui finit la prouve du théorème 0.2.

Partie 2 : Étude de fonction

On pose

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(\sqrt{x}) \end{array}$$

On admet (pour le moment) le théorème suivant :

Théorème 0.2

Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. Si $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $h'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \alpha$, alors $\exists \beta \in \mathbb{R}$ tel que $h(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \beta$.

3. (a) $x \mapsto \sqrt{x} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $\cos \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Donc, par composition de fonctions continues, $f : x \mapsto \cos(\sqrt{x}) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

(b) $x \mapsto \sqrt{x} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et $\cos$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc, par composition de fonctions dérivables, $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

(c) On a donc

$$\forall x > 0,\ f'(x) = -\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}.$$

Or $x \mapsto \sin(\sqrt{x}) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ par composition, donc $f' \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ par quotient d'applications continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

(d) $\sin$ est dérivable en 0, donc

$$\frac{\sin(t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

Donc, par composition de limites,

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}.$$

Donc $f' \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -1/2$. Donc f' vérifie les hypothèses du théorème de prolongement par continuité. Mais on ne peut pas prolonger une dérivée. Donc on ne peut rien déduire sur f'.

En revanche, on a $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -1/2$. Donc par théorème satanique (aka théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, ou théorème de la limite de la dérivée), f est dérivable en 0 et $f'(0) = -1/2$.

Donc $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et de plus, $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -1/2 = f'(0)$. Donc f' est continue en 0. Or $f' \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. Donc $f' \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Et donc $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

4. Soit $g : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \mathrm{ch}(\sqrt{-x})$.

(a) On a

$$\begin{array}{lllllll} \mathbb{R}_- & \to & \mathbb{R}_+ & & & & \text{continue} \\ x & \mapsto & -x & & & & \\ & & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ & & \text{continue} \\ & & x & \mapsto & \sqrt{x} & & \\ & & & & \mathbb{R} & \to \ [1, +\infty[& \text{continue} \\ & & & & x & \mapsto \ \mathrm{ch}(x) & \\ \mathbb{R}_- & \longrightarrow & & & & [1, +\infty[& \text{continue} \\ x & \longmapsto & & & & \mathrm{ch}(\sqrt{-x}) & \text{par composition} \end{array}$$

Donc, par composition g est bien définie sur $\mathbb{R}_-$ et $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$.

(b) On pose

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ g(x) & x < 0 \end{cases} \end{array}$$

On sait déjà, d'après 3d et 4a que $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_-^*, \mathbb{R})$.

En particulier, $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_-^*, \mathbb{R})$. Donc h est continue à droite en 0. Or $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$ d'après 4a. Donc, par caractérisation de la continuité par les limites,

$$h(x) = g(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x<0}]{} g(0) = -1/2 = f(0) = h(0).$$

Donc h est continue à gauche en 0. Donc $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

De plus, par composition, $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_-^*, \mathbb{R})$. En particulier, $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_-^*, \mathbb{R})$ et $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$. Et

$$\forall x < 0,\ h'(x) = -\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{-x})}{2\sqrt{-x}} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x<0}]{} -\frac{1}{2}\operatorname{sh}'(0) = -\frac{1}{2}$$

Donc par théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, h est dérivable en 0 à gauche, $h'_g(0) = -1/2$ et $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$.

De plus, $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $h'_d(0) = f(0) = -1/2$ d'après 3d. Donc, par caractérisation de la dérivabilité par les semis-dérivée, h est dérivable en 0 et $h'(0) = -1/2$. Et donc $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Problème 2 :
On définie la fonction f par $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$.

1. Préliminaires.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et g définie sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$. On suppose $g(a) = 0$ et $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

(a) On pose, $\forall x \in [\arctan(a), \pi/2[$, $\varphi(x) = g(\tan(x))$ et $\varphi(\pi/2) = 0$.

On sait $\tan \in \mathcal{C}^\infty(]-\pi/2, \pi/2[, \mathbb{R})$. Or $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$. Donc $\arctan(a) \in]-\pi/2, \pi/2[$. Donc $\tan$ est en particulier $\mathcal{C}^\infty$ sur $[\arctan(a), \pi/2[$.

Par continuité de $\tan$ et par le TVI, on sait donc que $\tan([\arctan(a), \pi/2[)$ est intervalle. Comme $\tan$ est strictement croissante, par stricte monotonie, on sait que $\tan([\arctan(a), \pi/2[)$ est un intervalle de même type (donc semi ouvert) et la croissance nous donne en plus, grâce au théorème de la limite monotone, $\tan([\arctan(a), \pi/2[) = [\tan(\arctan(a)), \lim_{x \to \pi/2} \tan(x)[= [a, +\infty[$.

Donc $\tan \in \mathcal{C}^\infty([\arctan(a), \pi/2[, [a, +\infty[)$. Or $g \in \mathcal{D}^1([a, +\infty[, \mathbb{R})$, donc par composition, $\varphi \in \mathcal{D}^1([\arctan(a), \pi/2[)$.

En particulier, $\varphi \in \mathcal{C}^0([\arctan(a), \pi/2[, \mathbb{R})$. Mais, par composition dans les limites, $\varphi(x) = g(\tan(x)) \xrightarrow[x \to \pi/2]{} 0 = \varphi(\pi/2)$ car $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ par hypothèse. Donc, par caractérisation de la continuité par les limites, φ est continue en $\pi/2$.

Finalement, $\varphi \in \mathcal{C}^0([\arctan(a), \pi/2], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]\arctan(a), \pi/2[, \mathbb{R})$. Et

$$\varphi(a) = g(\tan(\arctan(a))) = g(a) = 0 = \varphi(\pi/2).$$

Donc, par le théorème de Rolle, $\exists c \in]\arctan(a), \pi/2[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.

(b) Soit $c \in]\arctan(a), \pi/2[$ tel que $\varphi'(c) = 0$ (qui existe, d'après la question précédente). φ est dérivable sur $]\arctan(a), \pi/2[$ et $\forall x \in]\arctan(a), \pi/2[$, $\varphi'(x) = (1 + \tan(x)^2)g'(\tan(x))$. Donc $\varphi'(c) = 0 \iff (1 + \tan(c)^2)g'(\tan(c)) = 0 \iff g'(\tan(c)) = 0$ car $1 + \tan(c)^2 \neq 0$.

On pose alors $d = \tan(c)$. Donc $g'(d) = 0$. Et $c \in]\arctan(a), \pi/2[\implies d = \tan(c) \in]a, +\infty[$ par croissance de $\tan$.

2. Étude de f.

(a) Le discriminant du polynôme $1 + X + X^2$ est $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. Donc le polynôme $1 + X + X^2$ n'a pas de racines réelles, $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + x + x^2 \neq 0$.

Donc f est l'inverse d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas, donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Comme $x \mapsto 1+x+x^2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ en tant que fonction polynomiale et comme $\forall x \in \mathbb{R},\ 1+x+x^2 \neq 0$, on a donc $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{-1-2x}{(1+x+x^2)^2}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) \geq 0 \iff 1+2x \leq 0 \iff x \leq -1/2$.

Et aussi, $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = -\frac{2(1+x+x^2)^2 - 2(1+2x)^2(1+x+x^2)}{(1+x+x^2)^4} = \frac{6x(1+x)}{(1+x+x^2)^3}$.

D'où le tableau de variations

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
f'	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$f'(x)$		$+$			0		$-$		
f	0	$\nearrow$			$\frac{4}{3}$		$\searrow$		0

(c) On considère la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaison linéaire d'applications dérivables et $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = f'(x) - 1$. D'après le tableau de variations précédente, $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) \leq 1$. Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) \leq 0$. Donc g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

En fait, on a même $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ f'(x) < 1$, donc $\forall x \neq -1,\ g'(x) < 0$. Donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc g est injective.

Par ailleurs, g est continue et $g(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ et $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ par linéarité de la limite. Donc $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Donc $0 \in g(\mathbb{R})$, donc par définition, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, tel que $g(\alpha) = 0$.

Mais par injectivité de g, α est unique. Donc $\exists! \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(\alpha) = 0$. Autrement dit, $\exists! \alpha \in \mathbb{R},\ f(\alpha) = \alpha$.

On notera que $g(1) = f(1) - 1 = 1/3 - 1 = -2/3 < 0$ et que $g(1/3) = f(1/3) - 1/3 = 9/13 - 1/3 = 14/39 > 0$. Donc, par décroissance de g, on en déduit $\alpha \in [1/3, 1]$.

(d) On sait que f' est continue sur $\mathbb{R}$. Donc en particulier sur $[1/3, 1]$. Par le théorème des bornes atteintes, f' est donc bornée et atteint ses bornes sur $[1/3, 1]$. Autrement dit, par le théorème des bornes atteintes, $\exists a \in [1/3, 1]$ tel que $\forall x \in [1/3, 1],\ |f'(x)| \leq |f'(a)|$. Et $f'(a) \neq 0$ car f' non constante.

Par ailleurs, d'après le tableau de variations précédents, f' est croissante sur $[1/3, 1]$ et $f'(1/3) = -135/169$ et $f'(1) = -1/3$. Donc $\forall x \in [1/3, 1],\ f'(x) \in [f'(1/3), f'(1)]$. Donc $\forall x \in [1/3, 1],\ |f'(x)| < 1$. Donc $\exists C \in]0, 1[$ (avec $C = |f'(a)|$) tel que $\forall x \in [1/3, 1],\ |f'(x)| \leq C$.

(e) On pose $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

Toujours d'après le tableau de variations précédent, f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc en particulier sur $[1/3, 1]$. Par continuité et décroissance, on a donc $f([1/3, 1]) \subset [f(1), f(1/3)] = [1/3, 9/13] \subset [1/3, 1]$. Donc l'intervalle $[1/3, 1]$ est intervalle stable par f.

Or $u_0 \in [1/3, 1]$. Donc la suite (u_n) est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [1/3, 1]$.

(f) D'après la question précédente, $\forall x \in [1/3, 1],\ |f'(x)| \leq C$. Or f est dérivable sur $[1/3, 1]$. Donc, par l'inégalité des accroissements finis, $\forall a, b \in [1/3, 1],\ |f(b) - f(a)| \leq C|b - a|$.

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq C|u_n - \alpha|$, car $\alpha \in [1/3, 1]$ d'après 2c.

On a évidemment, $|u_0 - \alpha| \leq C^0 |u_0 - \alpha|$. Si $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \alpha| \leq C^n |u_0 - \alpha|$, alors $|u_{n+1} - \alpha| \leq C|u_n - \alpha| \leq C^{n+1}|u_0 - \alpha|$.

Donc, par principe de récurrence, on vient de montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq C^n |u_0 - \alpha|$.

Mais $u_0 = 1$ et $\alpha \in [1/3, 1]$, donc $|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha| \leq 2/3 \leq 1$. Donc finalement, $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq C^n$.

Comme $C \in]0,1[$ d'après la question précédente, on a $C^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par convergence des suites géométriques. Donc, par un corollaire du théorème des gendarmes, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers α, le point fixe de f.

3. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en tant qu'inverse d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

On a déjà calculé $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{-1-2x}{(1+x+x^2)^2}$ et $f''(x) = \frac{6x(1+x)}{(1+x+x^2)^3}$. En posant donc $g_0 : x \mapsto 1$, $g_1 : x \mapsto -1-2x$ et $g_2 : x \mapsto 6x(1+x)$, on a donc $g_0, g_1, g_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ car polynomiale et $\forall n \in \{0,1,2\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \frac{g_n(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}}$.

On remarque également que $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1+x+x^2)g_0'(x) - (0+1)(2x+1)x_0(x) = -(1+2x) = g_1(x)$ et $(1+x+x^2)g_1'(x) - (1+1)(2x+1)g_1(x) = -2(1+x+x^2) + 2(2x+1)^2 = 6x^2+6x = 6x(x+1) = g_2(x)$.

Supposons maintenant que $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $\exists g_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \frac{g_n(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}}$. Alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n+1)}(x) &= \frac{g_n'(x)(1+x+x^2)^{n+1} - (2x+1)(n+1)(1+x+x^2)^n g_n(x)}{(1+x+x^2)^{2n+2}} \\ &= \frac{g_n'(x)(1+x+x^2) - (n+1)(2x+1)g_n(x)}{(1+x+x^2)^{n+2}}.\end{aligned}$$

On pose alors $g_{n+1} : x \mapsto g_n'(x)(1+x+x^2) - (n+1)(2x+1)g_n(x)$. Alors $g_{n+1} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par somme et produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n+1)}(x) = \frac{g_{n+1}(x)}{(1+x+x^2)^{n+2}}$.

Donc, par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists g_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \frac{g_n(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}}$ et de plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_{n+1}(x) = (1+x+x^2)g_n'(x) - (n+1)(2x+1)g_n(x)$.