DS 6
Continuité - Dérivabilité

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 31 Janvier 2024

Le devoir dure 4h.

La qualité de la rédaction et de la présentation seront prises en compte dans la notation. On prendra bien garde à la justesse et la précision des justifications.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'identifiera clairement sur la copie et explicitera les décisions qu'il sera amené à prendre.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Le sujet comporte 3 pages.

Problème 1 :
Ce problème est un extrait d'un problème plus long dont le but est de montrer que la fonction $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$. Ce problème est composé de deux parties. La première plus théorique consiste à prouver un résultat théorique ; la seconde repose sur le résultat prouvé dans la première partie.

Partie 1 : Un théorème d'existence de limite

L'objectif de cette partie est de prouver le théorème

Théorème 0.1

Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. Si $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $h'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \alpha$, alors $\exists \beta \in \mathbb{R}$ tel que $h(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \beta$.

Pour ce faire nous allons démontrer un résultat intermédiaire :

Théorème 0.2

Si $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une fonction Lipschitzienne au voisinage de 0, alors elle admet une limite finie en 0.

1. On fixe $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $r > 0$ et $K > 0$ tel que f soit K-lipschitzienne sur $]0, r]$.

(a) Montrer que la fonction f est bornée sur $]0, r]$, à l'aide de l'inégalité triangulaire. Expliquer pourquoi on ne pouvait pas utiliser d'argument de continuité.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $]0, r]$ qui converge vers 0.

(b) Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extraction telle que $(f(u_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On notera ℓ sa limite.

(c) Montrer (très simplement) que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_{\varphi(n_0)}| \leq \frac{\varepsilon}{2K}$ et $|f(u_{\varphi(n_0)}) - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

(d) En déduire, à l'aide de l'inégalité triangulaire, que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \ell$.

Nous avons donc prouver le théorème 0.2

2. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose de plus que $\exists \ell' \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \ell'$.

(a) Expliquer pourquoi on ne peut pas utiliser le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$.

(b) Montrer que f' est bornée au voisinage de 0.

(c) À l'aide du théorème 0.2 démontré précédemment, prouver le théorème 0.1.

Partie 2 : Étude de fonction

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(\sqrt{x}) \end{array}$$

L'objectif de cette partie est de montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$, puis de la prolonger en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3. (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Calculer la dérivée de f' sur $\mathbb{R}_+^*$. Étudier la continuité de f'.

(d) Étudier la limite de f' en 0. Que peut-on en déduire sur f' ? Et sur f ?

4. Soit $g : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \mathrm{ch}(\sqrt{-x})$.

(a) Justifier que g est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_-$.

(b) On définit alors la fonction h par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ g(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Montrer que $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Problème 2 :

Le but est d'étudier la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$.

1. Préliminaires.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et g une fonction définie et continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$. On suppose

$$g(a) = 0 \qquad \text{et} \qquad g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

(a) On définit la fonction φ sur le segment $[\arctan(a), \pi/2]$ par

$$\varphi(\pi/2) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in [\arctan(a), \pi/2[,\ \varphi(x) = g(\tan(x)).$$

Montrer qu'il existe $d \in]\arctan(a), \pi/2[$ tel que $\varphi'(d) = 0$.

(b) En déduire $\exists c \in]a, +\infty[$ tel que $g'(c) = 0$.

2. Étude de f.

(a) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Déterminer les variations de f et de f' sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que f possède un seul point fixe α sur $\mathbb{R}$, puis que $\alpha \in [1/3, 1]$.

(d) Montrer $\exists C \in]0, 1[$ tel que $\forall x \in [1/3, 1]$, $|f'(x)| \leq C$.

(e) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1/3 \leq u_n \leq 1$.

(f) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq C^n |1 - \alpha|$. Que peut-on en conclure pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists g_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \frac{g_n(x)}{(1 + x + x^2)^{n+1}},$$

et montrer que la suite de fonction $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g_{n+1}(x) = (1 + x + x^2) g_n'(x) - (n + 1)(2x + 1) g_n(x).$$