NOM :
Prénom :

Mardi 05 Février 2024

# Interrogation 17

## Arithmétique

## Correction

**Exercice 1 :**
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Théorème de Bézout.
Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Alors $a \wedge b = 1 \iff \exists u, v \in \mathbb{Z},\ au + bv = 1$.

2. Lemme d'Euclide.
Soit $p \in \mathcal{P}$ et $a, b \in \mathbb{Z}$. Si $p|ab$, alors $p|a$ ou $p|b$.

3. Lemme de Gauss.
Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Si $a|bc$ et $a \wedge b = 1$, alors $a|c$.

4. Définition d'un nombre premier.
Soit $p \in \mathbb{N}$. $p$ est un nombre premier ssi $\mathrm{Div}_+(p) = \{1, p\}$ et $p \geq 2$.

5. Lien entre PGCD et PPCM.
Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Si $a \wedge b = 1$, alors $a \vee b = |ab|$. Et dans le cas général : $(a \wedge b)(a \vee b) = |ab|$.

6. Division euclidienne.
Soit $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Alors $\exists!(q, r) \in \mathbb{Z}$ tels que $a = bq + r$, où $0 \leq r < b$. $q$ est le quotient et $r$ le reste de la division euclidienne de $a$ par $b$.

7. Caractérisation du PGCD par des entiers premiers entre eux.
Soit $a, b \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{N}$. $d = a \wedge b \iff \exists a', b' \in \mathbb{Z}$, $a = da'$, $b = db'$.

8. Définition de la valuation $p$-adique.
Soit $p \in \mathcal{P}$ et $n \in \mathbb{Z}^*$. On définit la valuation $p$-adique de $n$, notée $v_p(n)$, par $v_p(n) = \max\{k \in \mathbb{N},\ p^k|n\}$.

**Exercice 2 :**
Résoudre l'équation $3x + 7y = 9$.

$3 \wedge 7 = 1|9$, donc l'équation diophantienne $3x + 7y = 9$ a des solutions. $(3, 0)$ est une solution de l'équation.

Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}$ une solution de l'équation. Alors $3x + 7y = 3 \times 3$. Donc $3(3 - x) = 7y$. Donc $3|7y$. Or $3 \wedge 7 = 1$. Donc par lemme de Gauss, $3|y$. Donc, par définition de la divisibilité, $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = 3k$. Donc $3(3 - x) = 7 \times 3k$. Et donc $x = 3 - 7k$. Donc $(x, y)$ est solution $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $(x, y) = (3 - 7k, 3k)$.

Il est facile de voir que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $3(3 - 7k) + 7(3k) = 9$. Donc l'ensemble des solutions de l'équation $3x + 7y = 9$ est $\{(3 - 7k, 3k),\ k \in \mathbb{Z}\}$.