



DS 7

Concours Blanc

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 28 Février 2024

Le devoir dure 4h.

La qualité de la rédaction et de la présentation seront prises en compte dans la notation. On prendra bien garde à la justesse et la précision des justifications.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'identifiera clairement sur la copie et explicitera les décisions qu'il sera amené à prendre.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Le sujet comporte 3 pages.

Problème 1 (Analyse) :

Le but du problème est de faire une étude de la fonction $x \mapsto \ln(1 - a/x)$, en fonction du paramètre $a > 0$. Dans tous le problème, on fixe un paramètre $a > 0$.

Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire

On pose $f_a : x \mapsto x \ln(1 - \frac{a}{x})$.

1. Donner le domaine de définition de f_a .
2. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que

$$\forall x > a, \quad \frac{a}{x} \leq \ln(x) - \ln(x - a) \leq \frac{a}{x - a}.$$

3. En déduire le tableau de variations complet de f_a . On précisera notamment les limites de f_a aux bornes de son domaine de définition.
4. Peut-on prolonger f_a en 0 ? Le prolongement est-il dérivable en 0 ?

Partie 2 : Étude d'une suite récurrente d'ordre 1

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R} \setminus [0, a]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f_a(u_n)$.

5. Justifier que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est bien définie.
6. Montrer que $\forall n \geq 2, u_n \in]-a, 0[$.
7. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

Partie 3 : Étude d'une suite implicite

8. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n : x \mapsto x - \ln(1 - a/x) - n$.
- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que h_n est dérivable sur $]a, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
 - (b) Montrer que $\exists! \alpha > a$ indépendant de n tel que $h'_n(\alpha) = 0$. En déduire le tableau de variation de h_n sur $]a, +\infty[$.
 - (c) Montrer alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq n_0$, $\exists! x_n \in]a, +\infty[$ tel que $x_n = \ln\left(1 - \frac{a}{x_n}\right) + n$.
9. Calculer $h_n(2a)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1$, $x_n > 2a$.
10. En déduire que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et donner un équivalent simple de x_n .
11. En déduire que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
12. On va donner un développement asymptotique à trois termes de x_n .
- (a) En étudiant $\frac{1}{x_n} - \frac{1}{n}$, montrer que

$$\frac{1}{x_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{a}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

- (b) En déduire que

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n - \frac{a}{n} - \frac{a^2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Problème 2 (Algèbre Linéaire) :

Le but de ce problème est d'étudier un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Partie 1 : Étude d'un endomorphisme

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $f(P) = (2X + 1)P - (X^2 - 1)P'$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, déterminer $\deg(f(P))$ et en déduire que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.
3. Calculer $f(\mathcal{B})$ et en déduire $\text{rg}(f)$. Que peut-on en déduire sur f ?
4. Montrer que l'équation $P + P' = X^2 P' - 2XP$ a une unique solution dans $\mathbb{R}_2[X]$ et donner cette solution.

Partie 2 : Étude des points fixes de f

On pose $g = f - \text{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$.

5. Justifier que $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ et que l'ensemble des points fixes de f est $\ker(g)$.
6. Déterminer $\text{rg}(g)$ et une base de $\ker(g)$ et $\text{Im}(g)$.
7. Calculer g^2 . g est-il un projecteur?
8. Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = \ker(g) \oplus \text{Im}(g)$.

Partie 3 : Changement de base

On pose $P_1(X) = X^2 - 1$, $P_2(X) = (X - 1)^2$, $P_3(X) = (X + 1)^2$ et $\mathcal{B}' = (P_1, P_2, P_3)$.

9. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
10. Calculer $f(\mathcal{B}')$.
11. En déduire l'expression de f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie 4 : Choix de $\mathcal{B}'$

Le programme de spé fournit tous les outils pour pouvoir justifier du choix pour les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$. Nous allons en proposer une autre version ici, adaptée au programme de sup.

12. Deux propriétés générales.
Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. On suppose qu'il existe $P, Q, R \in \mathbb{R}_2[X]$ non nuls tels que $\varphi(P) = aP$, $\varphi(Q) = bQ$ et $\varphi(R) = cR$.
 - (a) Montrer que (P, Q, R) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
 - (b) Montrer que $\varphi \in \text{GL}(\mathbb{R}_2[X]) \iff abc \neq 0$.
13. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Montrer que $f(P) = \lambda P$ si, et seulement si, $\tilde{P}$ est solution de l'équation différentielle $(x^2 - 1)y' - (2x + 1 - \lambda)y = 0$.
14. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note (E_λ) l'équation différentielle $(x^2 - 1)y' - (2x + 1 - \lambda)y = 0$.
 - (a) Résoudre (E_λ) sur $]1, +\infty[$.
 - (b) Montrer qu'il existe une fonction polynomiale non nulle solution de (E_λ) sur $]1, +\infty[$ si, et seulement si, $\lambda \in \{-1, 1, 3\}$.

Nous venons donc de trouver les valeurs de λ pour lesquels il existe des polynômes non nuls vérifiant l'équation $f(P) = \lambda P$. Il reste à trouver des solutions à ces équations. Pour ce faire, on peut résoudre 3 petits systèmes linéaires pour trouver les polynômes P_1, P_2, P_3 de la partie précédente.