DS 7
Concours Blanc
Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 28 Février 2024

Problème 1 (Analyse) :
Soit $a > 0$.

Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire

On pose $f_a : x \mapsto x \ln(1 - a/x)$.

1. $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc f_a est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $1 - a/x > 0 \iff 1 > a/x \iff x < 0$ ou $x > a$. Donc f_a est définie sur $]-\infty, 0[\cup]a, +\infty[$. On peut le retrouver en étudiant le signe de $x \mapsto 1 - a/x = \frac{x-a}{x}$.
En effet :

x	$-\infty$		0		a		$+\infty$
$x - a$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$1 - \frac{a}{x}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Donc, par composition, $x \mapsto \ln(1 - a/x)$ est définie sur $]-\infty, 0[\cup]a, +\infty[$. Et donc, par produit, f_a est définie sur $]-\infty, 0[\cup]a, +\infty[$.

2. La fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall t > 0$, $\ln'(t) = 1/t$.
On note de plus, que $\forall x > a$, $x > x - a > 0$.
Par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$, on a donc

$$\forall x > a,\ \forall t \in [x - a, x],\ \frac{1}{x} \leq \frac{1}{t} = \ln'(t) \leq \frac{1}{x - a}.$$

Donc, par l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall x > a,\ \forall s, t \in [x - a, x],\ s \leq t,\ \frac{t - s}{x} \leq \ln(t) - \ln(s) \leq \frac{t - s}{x - a}.$$

En particulier, avec $s = x - a$ et $t = x$, on a

$$\forall x > a,\ \frac{a}{x} \leq \ln(x) - \ln(x - a) \leq \frac{a}{x - a}.$$

3. On reprend la fonction $f_a : x \mapsto x\ln(1-a/x)$.

$$\begin{array}{ccccc}]-\infty,0[\cup]a,+\infty[& \to & \mathbb{R}_+^* & & \\ x & \mapsto & 1-\frac{a}{x} & & \end{array} \quad \text{dérivable}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \ln(t) \end{array} \quad \text{dérivable}$$

$$\begin{array}{ccccc}]-\infty,0[\cup]a,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} & & \text{dérivable} \\ x & \longmapsto & \ln(1-a/x) & & \text{par composition} \end{array}$$

Et donc, par produit, f_a est dérivable sur $]-\infty,0[\cup]a,+\infty[$.

$$\forall x \in]-\infty,0[\cup]a,+\infty[,\ f_a'(x) = \ln\left(1-\frac{a}{x}\right) + \frac{\frac{a}{x^2}}{1-\frac{a}{x}} = \ln\left(1-\frac{a}{x}\right) + \frac{a}{x-a}.$$

D'autre part, d'après la question 2,

$$\forall x \notin [0,a],\ \frac{a}{x} \leq \ln\left(\frac{x}{x-a}\right) = \ln\left(\frac{1}{1-a/x}\right) = -\ln\left(1-\frac{a}{x}\right) \leq \frac{a}{x-a}.$$

D'où,

$$\forall x > a,\ f_a'(x) = \ln\left(1-\frac{a}{x}\right) + \frac{a}{x-a} \geq 0.$$

De plus, $\forall x < 0,\ f_a'(x) = \ln(1-a/x) + \frac{1}{1-a/x} - 1$. Et $\forall x < 0,\ 1-a/x > 1$. On pose $g : t \mapsto \ln(t) + 1/t - 1$. Alors $g \in \mathcal{D}^1([1,+\infty[,\mathbb{R})$ et $\forall t > 1,\ g'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} = \frac{t-1}{t^2} \geq 0$. Donc g est croissante sur $[1,+\infty[$. Et $g(1) = 0$. Donc $\forall t > 1$, $g(t) \geq 0$. Donc $\forall x < 0,\ f_a'(x) = g(1-a/x) \geq 0$.

De plus,

$$f_a(x) = x\ln(1-a/x) \xrightarrow[\substack{x\to a \\ x>a}]{} -\infty$$

et

$$f_a(x) = x\ln(1-a/x) \xrightarrow[\substack{x\to 0 \\ x<0}]{} 0$$

par croissance comparée.

Enfin, par dérivabilité de $t \mapsto \ln(1+t)$ en 0,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\ln(1+t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1 \\ -\frac{a}{x} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0 \end{array}\right\} \implies f_a(x) = -a\frac{\ln(1-a/x)}{-a/x} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} -a.$$

D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		a		$+\infty$
$f_a'(x)$	$+$				$+$		
f_a	$-a$	↗	0		$-\infty$	↗	$-a$

4. Comme f_a est dérivable sur $]-\infty,0[\cup]a,+\infty[$, en particulier, $f_a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_-^*,\mathbb{R})$. Et $f_a(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0 \\ x<0}]{} 0$. Donc f_a est prolongeable par continuité en 0 en posant $f_a(0) = 0$.

Mais

$$\frac{f_a(x)}{x} = \ln(1-a/x) \xrightarrow[\substack{x\to 0 \\ x<0}]{} +\infty$$

Donc, une fois prolongée par continuité, le prolongement ne sera pas dérivable en 0.

Partie 2 : Étude d'une suite récurrente d'ordre 1

On pose $u_0 \in]-\infty, 0[\cup]a, +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f_a(u_n)$.

5. f_a est continue sur $]-\infty, 0[\cup]a, +\infty[$ et croissante. Donc, par TVI et théorème de la limite monotone, $f_a(]a, +\infty[) =]-\infty, -a[\subset \mathbb{R}_-^*$ et $f_a(\mathbb{R}_-^*) =]-a, 0[$.

Donc u_1 est bien définie et $u_1 \in \mathbb{R}_-^*$. De plus, $f_a(\mathbb{R}_-^*) =]-a, 0[\subset \mathbb{R}_-^*$, donc $\mathbb{R}_-^*$ est stable par f. Donc $(u_n)_{n\geq 1}$ est bien définie et $\forall n \geq 1$, $u_n < 0$.

6. On peut préciser la question précédente : On a montré à la question précédente que $u_1 < 0$. Or $f_a(\mathbb{R}_-^*) =]-a, 0[$. Donc $u_2 \in]-a, 0[$. De plus, toujours par continuité de f_a et croissance de f_a (donc par TVI et théorème de la limite monotone), $f_a(]-a, 0[) \subset f_0(\mathbb{R}_-^*) =]-a, 0[$. Donc $]-a, 0[$ est stable par f_a. Or $u_2 \in]-a, 0[$. Donc $\forall n \geq 2$, $u_n \in]-a, 0[$.

7. D'après la question précédente, $(u_n)_{n\geq 2}$ est bornée. Et f_a est croissante sur $\mathbb{R}_-^*$, donc en particulier f_a croissante sur $]-a, 0[$ car $]-a, 0[\subset \mathbb{R}_-^*$. Donc $(u_n)_{n\geq 2}$ est monotone. Donc, par théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Or f_a est continue sur $]-a, 0[$. Donc (u_n) converge vers un point fixe de f_a dans $]-a, 0[$.

Soit $x \in]-a, 0[$ tel que $f(x) = x$. Alors $x \ln(1 - a/x) = x$. Or $x \neq 0$. Donc $\ln(1 - a/x) = 1$. Donc $1 - a/x = e$. Et donc $x = \frac{a}{1-e}$. Donc $\frac{a}{1-e}$ est le seul point fixe de f_a sur $]-a, 0[$.

Donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{a}{1-e}$.

Partie 3 : Étude d'une suite implicite

8. On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $h_n : x \mapsto x - \ln(1 - a/x) - n$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, par la même composition que pour f_a étudiée dans 1, h_n est définie et dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]a, +\infty[$. En particulier, $h_n \in \mathcal{D}^1(]a, +\infty[, \mathbb{R})$. Et

$$\forall x > a,\ h_n'(x) = 1 - \frac{a/x^2}{1 - a/x} = 1 - \frac{a}{x(x-a)} = \frac{x^2 - ax - a}{x(x-a)}$$

(b) $\Delta = a^2 + 4a = a(a+4) > 0$. Donc le numérateur de h_n' s'annule en $\frac{a-\sqrt{a^2+4a}}{2}$ et $\frac{a+\sqrt{a^2+4a}}{2}$.

Or $\frac{a+\sqrt{a^2+4a}}{2} > \frac{a+a}{2} = a$ car $a > 0$ et $\frac{a-\sqrt{a^2+4a}}{2} < 0$. On pose donc $\alpha = \frac{a+\sqrt{a^2+4a}}{2} > a$ indépendant de n. Et donc h_n' ne s'annule que α sur $]a, +\infty[$. On en déduit le tableau de signe de $x \mapsto x^2 - ax - a$ et donc le tableau de variations de h_n :

x	a		r_2		$+\infty$
$h_n'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
h_n	‖ $+\infty$	↘	$h_n(r_2)$	↗	$+\infty$

Avec les limites aux bornes :

$$1 - \frac{a}{x} \xrightarrow[\substack{x\to a\\ x>a}]{} 0^+ \implies h_n(x) = x - \ln(1 - a/x) - n \xrightarrow[\substack{x\to a\\ x>a}]{} +\infty$$

et

$$1 - \frac{a}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 \implies h_n(x) = x - \ln(1 - a/x) - n \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

(c) D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N}$, $h_n(\alpha) = \alpha - \ln(1 - a/\alpha) - n$. Or $\alpha = \frac{a+\sqrt{a^2+4a}}{2}$ est indépendant de n. Donc $h_n(\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$. Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $h_n(\alpha) < 0$.

Soit $n \geq n_0$. $h_n \in \mathcal{C}^0([\alpha, +\infty[, \mathbb{R})$ et h_n croissante et $h_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Donc par TVI et théorème de la limite monotone, $h_n([\alpha, +\infty[) = [h_n(\alpha), +\infty[$. Or $h_n(\alpha) < 0$ car $n \geq n_0$. Donc, par théorème de la bijection (continuité et stricte croissance sur $[\alpha, +\infty[$), $\exists! x_n \geq \alpha$ tel que $h_n(x_n) = 0$. Or $h_n(\alpha) < 0$, donc $x_n \neq \alpha$.

On vient donc de montrer que $\forall n \geq n_0$, $\exists x_n > \alpha$ tel que $x_n = \ln\left(1 - \frac{a}{x_n}\right) + n$.

9. On a aussi

$$\forall n \in \mathbb{N},\ h_n(2a) = 2a - \ln(1 - 1/2) - n = 2a + \ln(2) - n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty.$$

Donc $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1$, $h_n(2a) < 0$.

Par ailleurs, on sait que $\forall n \geq n_0$, $\forall x > x_n$, $h_n(x) > 0$ car h_n strictement monotone sur $[\alpha, +\infty[$. Donc si $\exists n \geq n_1$ tel que $x_n \leq 2a$, alors, par croissance, $h_n(x_n) = 0 \leq h_n(2a) < 0$. ☠. Donc $\forall n \geq n_1$, $x_n > 2a$.

10. Soit $n \geq n_1$. Alors $x_n > 2a$. Donc $\frac{a}{x_n} < \frac{1}{2}$. Et donc $\ln(1 - a/x_n) > \ln(1 - 1/2) = -\ln(2)$. Donc

$$x_n = \ln(1 - a/x_n) + n > n - \ln(2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Donc, par théorème des gendarmes $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

De plus, $\frac{a}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $\ln(1 - a/x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Et donc

$$\frac{x_n}{n} = \frac{1}{n} \ln\left(1 - \frac{a}{x_n}\right) + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

11. On a donc, $\frac{a}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc, par équivalent de références,

$$\ln\left(1 - \frac{a}{x_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{a}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{a}{n}.$$

Et donc, par caractérisation des $\sim$ par les o,

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \frac{a}{n} + o(1/n).$$

12. (a) Par définition de (x_n), on a

$$\begin{aligned}
\forall n \geq n_1,\ \frac{1}{x_n} - \frac{1}{n} &= \frac{n - x_n}{n x_n} \\
&= -\frac{\ln\left(1 - \frac{a}{x_n}\right)}{n x_n} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a/n}{n^2} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a}{n^3}.
\end{aligned}$$

D'où, par caractérisation des équivalents par les o,

$$\frac{1}{x_n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{a}{n^3} + o(1/n^3).$$

(b) D'où

$$\begin{aligned}
x_n - n &= \ln\left(1 - \frac{a}{x_n}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{a}{n} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{a}{n} - \frac{a^2}{n^3} + o(1/n^3).
\end{aligned}$$

Et donc

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \frac{a}{n} - \frac{a^2}{n^3} + o(1/n^3).$$

Problème 2 (Algèbre Linéaire) :
On pose $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.

Partie 1 : Étude d'un endomorphisme

On pose $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $f(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P'$.

1. Le produit polynomiale est bilinéaire, donc $P \mapsto (2X+1)P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$. Et la dérivation est linéaire, donc $P \mapsto (X^2-1)P' \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ par composée d'applications linéaires. Donc, par structure de $\mathbb{R}$-ev de $\mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$.

On peut évidemment le montrer par le calcul en utilisant la définition.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

Si $\deg(P) \leq 1$, alors $P' = 0$. Et donc $\deg(f(P)) = \deg((2X+1)P) = 1 + \deg(P) \leq 2$ par degré d'un produit de polynômes.

Si $\deg(P) \geq 3$, alors $\deg(P') = \deg(P) - 1 \geq 2$. Donc $\deg((2X+1)P) = 1 + \deg(P)$ et $\deg((X^2-1)\deg(P')) = 2 + \deg(P') = 1 + \deg(P) = \deg((2X+1)P)$. Or $\deg(P) \geq 3$, donc $P \neq 0$. Donc $\operatorname{coeff\,dom}((2X+1)P) = 2\operatorname{coeff\,dom}(P)$ et $\operatorname{coeff\,dom}((X^2-1)P') = \operatorname{coeff\,dom}(P') = \deg(P)\operatorname{coeff\,dom}(P)$. Donc

$$\operatorname{coeff\,dom}((2X+1)P) - \operatorname{coeff\,dom}((X^2-1)P') = (2 - \deg(P))\operatorname{coeff\,dom}(P) \neq 0$$

car $\deg(P) \geq 3$. Donc, par cas d'égalité du degré d'une somme de polynômes, $\deg(f(P)) = \max(\deg((2X+1)P), \deg((X^2-1)P')) = \deg(P) + 1$.

Si $\deg(P) = 2$, alors on a toujours $\deg((2X+1)P) = \deg(P) + 1 = 3 = \deg((X^2-1)P')$ d'après le paragraphe précédent. Donc $\deg(f(P)) \leq \max(\deg((2X+1)P), \deg((X^2-1)P')) \leq \deg(P) + 1 \leq 3$. Mais cette fois

$$\operatorname{coeff\,dom}((2X+1)P) - \operatorname{coeff\,dom}((X^2-1)P') = (2 - \deg(P))\operatorname{coeff\,dom}(P) = 0$$

car $\deg(P) = 2$. Et donc $\deg(f(P)) < 3$. Donc $\deg(f(P)) \leq 2$.

Finalement, on a donc :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \begin{cases} \deg(f(P)) \deg(P) + 1 & \deg(P) \neq 2 \\ \deg(f(P)) \leq 2 & \deg(P) = 2 \end{cases}$$

En particulier, on vient de montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$. Or f est linéaire d'après la question précédente. Donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.

3. On a facilement

$$\begin{aligned} f(1) &= (2X+1) - 0 = 2X + 1 \\ f(X) &= (2X+1)X - (X^2-1) = X^2 + X + 1 \\ f(X^2) &= (2X+1)X^2 - (X^2-1)2X = X^2 + 2X \end{aligned}$$

(en particulier, on retrouve le fait que f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ par linéarité).

Soit $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda f(1) + \mu f(X) + \gamma f(X^2) = 0$. Alors

$$\begin{aligned} \lambda f(1) + \mu f(X) + \gamma f(X^2) = 0 &\iff \lambda(2X+1) + \mu(X^2+X+1) + \gamma(X^2+2X) = 0 \\ &\iff (\mu+\gamma)X^2 + (2\lambda+\mu+2\gamma)X + \lambda + \mu = 0 \\ &\iff \begin{cases} \mu + \gamma = 0 \\ 2\lambda + \mu + 2\gamma = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \end{cases} && \text{liberté } \mathcal{B} \\ &\iff \begin{cases} \mu + \gamma = 0 \\ 2\lambda - \mu = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \lambda + \mu = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} \mu + \gamma = 0 \\ 2\lambda - \mu = 0 \\ 3\lambda = 0 \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$
$$\iff \lambda = \mu = \gamma = 0$$

Donc, par définition, $f(\mathcal{B})$ est une famille libre. Et donc, par caractérisation de la liberté par le rang, $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f(\mathcal{B})) = 3$.

Comme $\mathbb{R}_2[X]$ est un ev de dimension finie ($\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$), on en déduit que $f \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}_2[X])$ par théorème d'isomorphisme.

Remarque :
On peut le retrouver à partir de ce qui a été fait, mais ça revient à refaire le cours : $\lambda f(1) + \mu f(X) + \gamma f(X^2) = f(\lambda + \mu X + \gamma X^2)$. On vient donc de montrer que $\ker(f) = \{0\}$. Et on peut re-conclure par le théorème d'isomorphisme.

4. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P + P' = X^2P' - 2XP$. Alors $(2X+1)P - (X^2-1)P' = 0$. Donc $f(P) = 0$. Et donc $P \in \ker(f)$. Or on vient de montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. Donc $\ker(f) = \{0\}$ par théorème d'isomorphisme ou caractérisation de l'injectivité par le noyau. Donc $P = 0$. Et clairement, $P = 0$ est une solution.

Donc l'équation a une unique solution dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui est le polynôme nul.

Partie 2 : Étude des points fixes de f

On pose $g = f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$.

5. $\mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ est un $\mathbb{R}$-ev et $f, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$. Donc $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors :

$$\begin{aligned} P \text{ point fixe de } f &\iff f(P) = P && \text{def point fixe} \\ &\iff f(P) - P = 0 \\ &\iff g(P) = 0 && \text{def } g \\ &\iff P \in \ker(g) && \text{def } \ker(g) \end{aligned}$$

6. D'après le calcul de $f(\mathcal{B})$ de la question 3, on a

$$g(1) = 2X, \qquad g(X) = X^2 + 1, \qquad g(X^2) = 2X.$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(g) &= \mathrm{rg}(2X, X^2+1, 2X) \\ &= \mathrm{rg}(2X, X^2+1) && \text{élimination dans un } \mathrm{Vect} \\ &= 2 \end{aligned}$$

car une famille de polynômes échelonnée en degré sans le polynôme nul est libre.

On en déduit que $\dim(\ker(g)) = 3 - \mathrm{rg}(g) = 1$ par théorème du rang. Or $g(1-X^2) = g(1) - g(X^2) = 2X - 2X = 0$ par linéarité. Donc $X^2 - 1 \in \ker(g)$. Et donc $\mathrm{Vect}(X^2-1) \subset \ker(g)$. Or $\dim(\mathrm{Vect}(X^2-1)) = 1 = \dim(\ker(g))$ car $X^2 - 1 \neq 0$. Donc $\ker(g) = \mathrm{Vect}(X^2-1)$.

Enfin, $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}(g(1), g(X), g(X^2)) = \mathrm{Vect}(g(1), g(X))$ par élimination dans un Vect (voir calcul du rang). Or $\mathrm{rg}(g) = 2$. Donc, par caractérisation des bases en dimension finie, $(g(1), g(X)) = (2X, X^2+1)$ est une base de $\mathrm{Im}(g)$.

7. On a

$$\begin{aligned} g^2(1) &= g(2X) = 2g(X) = 2(X^2+1) \\ g^2(X) &= g(X^2+1) = g(X^2) + g(1) = 4X \\ g^2(X^2) &= g(2X) = 2(X^2+1). \end{aligned}$$

En particulier $g^2(1) \neq g(1)$. donc $g^2 \neq g$. Et donc g n'est pas un projecteur.

8. D'après la question 6, (X^2-1) est une base de $\ker(g)$ et $(2X, X^2+1)$ est une base de $\mathrm{Im}(g)$. Or

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(X^2-1, 2X, X^2+1) &= \mathrm{rg}(X^2-1, 2X, 2) && \text{substitution } 2 = (X^2+1)-(X^2-1)\\ &= 3\end{aligned}$$

car la famille $(X^2-1, 2X, 2)$ est une famille de polynôme échelonnée en degré sans le polynôme nul, donc libre. Donc, par caractérisation des bases par le rang, $(X^2-1, 2X, X^2+1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Or $(X^2-1, 2X, X^2+1)$ est la concaténation d'une base de $\ker(g)$ et de $\mathrm{Im}(g)$. Et donc, par liberté de cette base,

$$\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Vect}(X^2-1) \oplus \mathrm{Vect}(2X, X^2+1) = \ker(g) \oplus \mathrm{Im}(g).$$

Finalement, malgré le fait que g ne soit pas un projecteur, on a quand même l'une des propriétés des projecteurs : $\ker(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont supplémentaires (et ce n'est donc pas une caractérisation, mais seulement une conséquence des projecteurs qui peut être obtenue dans d'autres cas).

Partie 3 : Changement de base

Soit $P_1(X) = X^2-1$, $P_2(X) = (X-1)^2$ et $P_3(X) = (X+1)^2$ et $\mathcal{B}' = (P_1, P_2, P_3)$.

9. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(\mathcal{B}') &= \mathrm{rg}(X^2-1, X^2-2X+1, X^2+2X+1)\\ &= \mathrm{rg}(X^2-1, -2X+2, 2X+2) && \text{substitution et } \begin{cases}-2X+2 = X^2-2X+1-(X^2-1)\\ 2X+2 = X^2+2X+1-(X^2-1)\end{cases}\\ &= \mathrm{rg}(X^2-1, -2X+2, 4) && \text{substitution et } 4 = (2X+2)+(-2X+2)\\ &= 3 && \text{échelonnée en degré}\end{aligned}$$

par caractérisation de la liberté par le rang.

Donc, par caractérisation des bases par le rang, $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

10. On a facilement,

$$\begin{aligned}f(P_1) &= f(X^2) - f(1) = X^2-1\\ f(P_2) &= f(X^2) - 2f(X) + f(1) = -X^2+2X-1 = -P_2(X)\\ f(P_3) &= f(X^2) + 2f(X) + f(1) = 3X^2+6X+3 = 3P_3(X)\end{aligned}$$

(on notera que pour P_1, on pouvait se passer du calcul puisque $P_1 \in \ker(g)$).

11. On a déjà $\forall n \in \{0,1\}$, $f^n(P_1) = P_1$, $f^n(P_2) = (-1)^n P_2$ et $f^n(P_3) = 3^n P_3$. On pose $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = 3$. Supposons $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \in \{1,2,3\}$, $f^n(P_k) = \lambda_k^n P_k$. Alors $f^{n+1}(P_k) = f(f^n(P_k)) = \lambda_k^n f(P_k) = \lambda_k^{n+1} P_k$ par linéarité. Et donc, par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^n(P_1) = P_1, \qquad f^n(P_2) = (-1)^n P_2, \qquad f^n(P_3) = 3^n P_3.$$

De plus,

$$\begin{aligned}\begin{cases}P_1(X) = X^2-1\\ P_2(X) = X^2-2X+1\\ P_3(X) = X^2+2X+1\end{cases} &\iff \begin{cases}P_1 = X^2-1\\ P_2 - P_1 = -2X+2\\ P_3 - P_2 = 4X\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}P_1 = X^2-1\\ P_3 + P_2 - 2P_1 = 4 \quad L_2 \leftarrow 2L_2 - L_3\\ P_3 - P_2 = 4X\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}2P_1 + P_3 + P_2 = 4X^2 \quad L_1 \leftarrow 4L_1 + L_2\\ P_3 + P_2 - 2P_1 = 4\\ P_3 - P_2 = 4X\end{cases}\end{aligned}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
f^n(1) &= \frac{1}{4} f^n(P_3 + P_2 - 2P_1) \\
&= \frac{1}{4}(3^n P_3 + (-1)^n P_2 - 2P_1) \\
&= \frac{1}{4}\Big((3^n + (-1)^n - 2)X^2 + 2(3^n - (-1)^n)X + 3^n + (-1)^n + 2\Big) \\
f^n(X) &= \frac{1}{4} f^n(P_3 - P_2) \\
&= \frac{1}{4}(3^n P_3 - (-1)^n P_2) \\
&= \frac{1}{4}\Big((3^n - (-1)^n)X^2 + 2(3^n + (-1)^n)X + 3^n - (-1)^n\Big) \\
f^n(X^2) &= \frac{1}{4} f^n(2P_1 + P_3 + P_2) \\
&= \frac{1}{4}(2P_1 + 3^n P_3 + (-1)^n P_2) \\
&= \frac{1}{4}\Big((3^n + (-1)^n + 2)X^2 + 2(3^n - (-1)^n)X + 3^n + (-1)^n - 2\Big)
\end{aligned}$$

Partie 4 : Choix de $\mathcal{B}'$

12. Deux propriétés générales.

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts et $P, Q, R \in \mathbb{R}_2[X]$ non nuls tel que $\varphi(P) = aP$, $\varphi(Q) = bQ$ et $\varphi(R) = cR$.

(a) Soit $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda P + \mu Q + \gamma R = 0$. En appliquant φ et par linéarité de φ, on obtient alors $a\lambda P + b\mu Q + c\gamma R = 0$. En appliquant φ de nouveau, on obtient alors $a^2\lambda P + b^2\mu Q + c^2\gamma R = 0$.

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} \lambda P + \mu Q + \gamma R = 0 \\ a\lambda P + b\mu Q + c\gamma R = 0 \\ a^2\lambda P + b^2\mu Q + c^2\gamma R = 0 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} \lambda P + \mu Q + \gamma R = 0 \\ (b-a)\mu Q + (c-a)\gamma R = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ (b-a)(b+a)\mu Q + (c-a)(c+a)\gamma R = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - a^2 L_1 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} \lambda P + \mu Q + \gamma R = 0 \\ (b-a)\mu Q + (c-a)\gamma R = 0 \\ (c-a)((c+a) - (b-a))\gamma R = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - (b-a)L_2 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} \lambda P + \mu Q + \gamma R = 0 \\ (b-a)\mu Q + (c-a)\gamma R = 0 \\ (c-a)(c-b)\gamma R = 0 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} \lambda P + \mu Q = 0 \\ (b-a)\mu Q = 0 \\ \gamma = 0 & c \neq a,\ c \neq b,\ R \neq 0 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} \lambda P = 0 \\ \mu = 0 & b \neq a \\ \gamma = 0 \end{cases} \\
\iff &\lambda = \mu = \gamma = 0
\end{aligned}$$

Donc la famille (P, Q, R) est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$. Or $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, donc par caractérisation des bases en dimension finie, (P, Q, R) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(b) Alors

$$\begin{aligned}
\varphi \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}_2[X]) &\iff (\varphi(P),\varphi(Q),\varphi(R)) \text{ base } \mathbb{R}_2[X] && \text{caractérisation des isomorphismes par l'image d'une base}\\
&\iff (\varphi(P),\varphi(Q),\varphi(R)) \text{ libre} && \text{caractérisation des bases en dimension finie}\\
&\iff (aP,bQ,cR) \text{ libre}\\
&\iff a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0 && \text{principe d'élimination dans un } \mathrm{Vect}\\
&\iff abc\neq 0
\end{aligned}$$

13. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et $P\in\mathbb{R}_2[X]$. Alors

$$\begin{aligned}
f(P)=P &\iff (2X+1)P-(X^2-1)P'=\lambda P && \text{def } f\\
&\iff (X^2-1)P'-(2X+1-\lambda)P=0\\
&\implies \forall x>1,\ (x^2-1)\widetilde{P'}(x)-(2x+1-\lambda)\widetilde{P}(x)=0\\
&\iff \widetilde{P} \text{ solution de } (x^2-1)y'-(2x+1-\lambda)y=0 \text{ sur }]1,+\infty[.
\end{aligned}$$

De plus, si $\widetilde{P}$, est solution de $(x^2-1)y'-(2x+1-\lambda)y=0$ sur $]1,+\infty[$, alors, par définition d'une racine, $\forall x>1$, x est racine du polynôme $(X^2-1)P'-(2X+1-\lambda)P$ et donc le polynôme $(X^2-1)P'-(2X+1-\lambda)P$ a une infinité de racines, donc $(X^2-1)P'-(2X+1-\lambda)P=0$ et donc $f(P)=\lambda P$.

Finalement $f(P)=\lambda P$ si, et seulement si, $\widetilde{P}$ est solution de $(E_\lambda):(x^2-1)y'-(2x+1-\lambda)y=0$ sur $]1,+\infty[$.

14. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et $(E_\lambda):(x^2-1)y'-(2x+1-\lambda)y=0$.

(a) Alors on a aussi $(E_\lambda):y'-\frac{2x+1-\lambda}{x^2-1}y=0$. Donc (E_λ) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène définie sur $]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$. On ne va la résoudre que sur $]1,+\infty[$.

On a

$$\forall x>1,\ \frac{2x+1-\lambda}{x^2-1}=\frac{2x}{x^2-1}+\frac{1-\lambda}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right).$$

Une primitive de $x\mapsto \frac{2x}{x^2-1}+\frac{1-\lambda}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$ sur $]1,+\infty[$, par linéarité de la dérivation, est $x\mapsto \ln(x^2-1)+\frac{1-\lambda}{2}(\ln(x-1)-\ln(x+1))$. Donc l'ensemble des solutions de (E_λ) est

$$\left\{\begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \mu e^{\ln(x^2-1)+\frac{1-\lambda}{2}(\ln(x-1)-\ln(x+1)},\ \mu\in\mathbb{R}\end{array}\right\}.$$

Or

$$\forall x>1,\ e^{\ln(x^2-1)+\frac{1-\lambda}{2}(\ln(x-1)-\ln(x+1)}=(x^2-1)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1-\lambda}{2}}=(x-1)^{\frac{3-\lambda}{2}}(x+1)^{\frac{1+\lambda}{2}}.$$

Donc l'ensemble des solutions de (E_λ) sur $]1,+\infty[$ est

$$\left\{\begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \mu(x-1)^{\frac{1-\lambda}{2}}(x+1)^{\frac{1+\lambda}{2}},\ \mu\in\mathbb{R}\end{array}\right\}.$$

(b) Alors :

$$\begin{aligned}
(E_\lambda) \text{ a une solution polynomiale non nulle} &\iff \begin{cases}\frac{1+\lambda}{2}\in\mathbb{N}\\ \frac{3-\lambda}{2}\in\mathbb{N}\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}1+\lambda\in 2\mathbb{N}\\ 3-\lambda\in 2\mathbb{N}\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}\lambda\in\mathbb{Z}\\ \lambda\equiv 1\ [2]\\ 1+\lambda\geq 0\\ 3-\lambda\geq 0\end{cases}
\end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda \in \mathbb{Z} \\ \lambda \equiv 2\ [2] \\ -1 \leq \lambda \leq 3 \end{cases}$$
$$\iff \lambda \in \{-1, 1, 3\}.$$