



Chapitre 16 - TD :

Fractions Rationnelles

Indications

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

28 février 2024

1 Fractions Rationnelles

Exercice	Indications
1	Le numérateur et dénominateur sont scindés à racines simples. On a une décomposition facile, dans ce cas.
2	Il y a un lien entre racine et dérivé pour les polynômes. Ça marche pareil pour les fractions rationnelles. Les manipulations sont justes plus délicates.
3	Raisonner par l'absurde, évidemment. Sortir des fractions rationnelles et revenir sur les polynômes pour pouvoir utiliser de l'arithmétique.
4	On est dans \mathbb{C} . On peut donc utiliser le théorème de D'Alembert-Gauss. Ça simplifie grandement les choses.
5	Dans \mathbb{R} , les choses sont un peu plus compliquées. Mais le cours donne la forme des décompositions en éléments simples. Ensuite, faire preuve d'un peu d'astuce pour trouver les éléments simples. Au pire, on peut toujours repasser par les complexes.
6	<ol style="list-style-type: none">1 Montrer que beaucoup des coefficients de P sont nuls. Ceux qui restent donne le résultat. Montrer que $F(\omega X) = F(X)$. Or le dénominateur de F est connue. On peut alors2 utiliser la question 1. Un peu de degré, quelques évaluations bien choisies et le tour est joué.
7	Utiliser Euler et faire apparaître l'évaluation d'une fraction rationnelle. Il n'y a plus qu'à étudier cette fraction rationnelle.
8	Le dénominateur est scindé. On connaît donc l'écriture de la décomposition en éléments simples.
9	On a déjà un résultat du cours qui s'approche de ce qui est demandé. Après, il faut "juste" joué avec ça.
10	La question 2 permet d'avoir l'expression de P_n . À partir de là, c'est plus facile.
11	<ol style="list-style-type: none">1 C'est facile, P étant scindé à racines simples.2 Reprendre l'expression de P scindé, puis dériver. Faire le lien ensuite avec la question précédente.3 C'est toujours de la décomposition en éléments simples. On sait faire.4 Remettre au même dénominateur, puis regarder le coefficients devant X^{n-1} de P''.

12	Il faut choisir une bonne fraction rationnelle de sorte que le système à résoudre soit l'évaluation de cette fraction rationnelle en trois points explicites distincts. Puis étudier la fraction rationnelle pour en déduire les solutions du système.
13	Idem. Cet exo est une généralisation du précédent.
14	<ol style="list-style-type: none"> 1 Utiliser la décomposition en éléments simples de P'/P, dériver et conclure. 2 Il s'agit de préciser la question précédente. Dériver successivement le résultat précédent, puis évalué en 0.
15	Le lien avec les fractions n'est pas évident. Commencez par écrire le polynôme avec des coefficients. Puis calculer les intégrales. Vous devriez alors pouvoir faire apparaître une fraction rationnelle bien choisie. Il suffit ensuite d'utiliser la décomposition en éléments simples à l'envers : on a déjà la fractions rationnelle décomposée. On factorise donc pour l'écrire sous forme du quotient de deux polynômes. Et après, il n'y a plus qu'à faire de la vérification pour établir la relation désirée.
16	<ol style="list-style-type: none"> 1. C'est un jeu d'écriture. Il suffit d'écrire les définitions et tout se passe bien. 2. Là aussi, c'est que de l'écriture. 3. Attention, $\frac{Q}{P}$ n'est pas une fraction rationnelle. C'est encore de l'écriture, mais il y a quelques difficultés supplémentaires. Il faut faire attention. Ça devient plus délicat. En allant doucement et en prenant des précautions, tout devrait bien se passer. 4.(a) Il suffit d'exploiter le fait que P est symétrique. 4.(b) Il y a un lien entre multiplicité et dérivation dans le cours. 4.(c) P est symétrique. Encore et toujours. 4.(d) Faire un peu comme les deux questions précédentes. 5. C'est un problème de factorisation. Faire une récurrence sur le degré. On attend ici la même version que la question 5, mais sans les indications. Autrement dit, c'est un problème de factorisation. Les questions précédentes donnent des racines de P. Donc un bout de factorisation. Ensuite, il n'y a plus qu'à changer l'ampoule. 6.

2 Shampooing

Exercice	Indications
17	<ol style="list-style-type: none"> 1. Cette question a déjà été faite dans le chapitre sur les complexes. 7. Si on trouve des racines, mais qu'il y en a assez, alors on les a toutes. 8. Relations coefficients/racines. 9. Reprendre la 3 et dériver. Attention, il faut repasser aux polynômes. 10. T_n est scindé à racines simples. Ça ne devrait pas être trop compliqué. 11. On rappelle que les polynômes de Tchebychev sont scindés à racines simples. Donc il ne devrait pas être trop difficile de faire la décomposition en éléments simples. 12. Utiliser la 11. Elle doit bien servir à quelque chose. 13. Il suffit de choisir une bonne valeur de θ. 14.(a) Que représente les polynômes P_m pour $\mathbb{R}_n[X]$? 14.(b) Il suffit d'écrire l'identité de Riesz et de simplifier les expressions au fur et à mesure. Autrement dit, on est en train de faire l'analyse d'un raisonnement par analyse-synthèse. 14.(c) RAS. 14.(d) C'est du calcul en reprenant les questions précédentes et Euler.